Αλγόριθμοι Ροής σε Γράφους
(CLR, κεφάλαιο 27)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής θέματα:

Δίκτυα ροής και το πρόβλημα της μέγιστης ροής

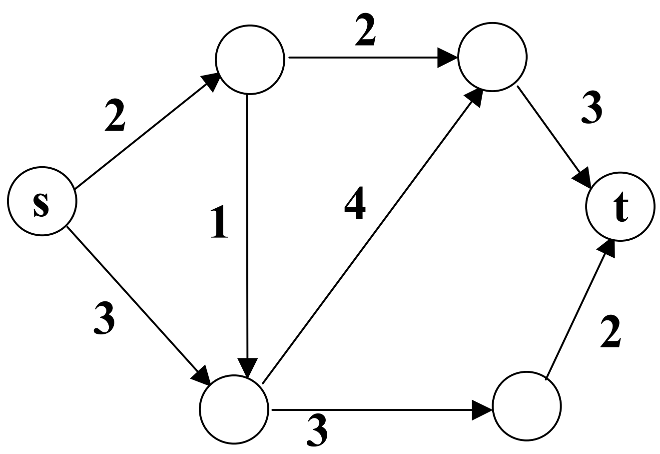
Η μεθοδολογία Ford-Fulkerson

Ο αλγόριθμος Edmonds-Karps

Δίκτυα Ροής

- Ενα ***δίκτυο ροής*** είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E) με δύο διακεκριμένες κορυφές: την ***πηγή*** **s** και τον ***προορισμό*** **t**.
- Κάθε ακμή (u,v)∈E έχει μια μή αρνητική ***χωρητικότητα*** c(u,v).
- Αν (u,v)∉E τότε γράφουμε c(u,v) = 0.

  π.χ. το δίκτυο Δ:



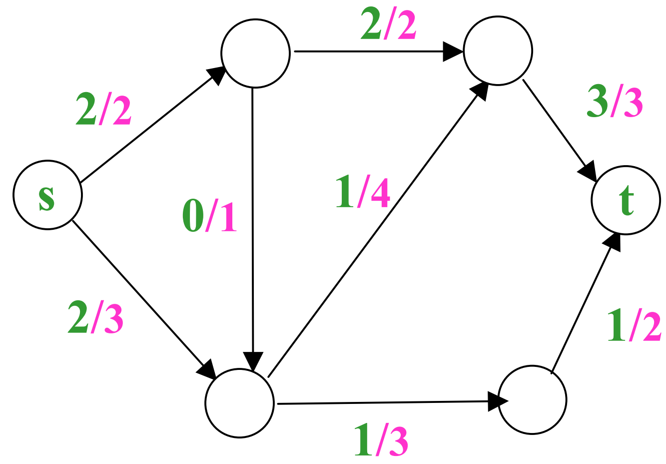
Θετικές ροες σε δίκτυα ροής

- Μια ***θετική ροή*** πάνω στο δίκτυο G είναι μια συνάρτηση $p : V \times V \rightarrow \Re^+$ που ικανοποιεί τα εξής:

  1. $0 \leq p(u,v) \leq c(u,v)$, για κάθε $u,v \in V$
     (περιορισμός χωρητικότητας)
  2. για κάθε $u \in V - \{s,t\}$ $\sum_{v \in V} p(u,v) = \sum_{v \in V} p(v,u)$
     (διατήρηση ροής)

- Παρατήρηση: ο ορισμός επιτρέπει να είναι όλες οι θετικές ροές ίσες με το μηδέν.

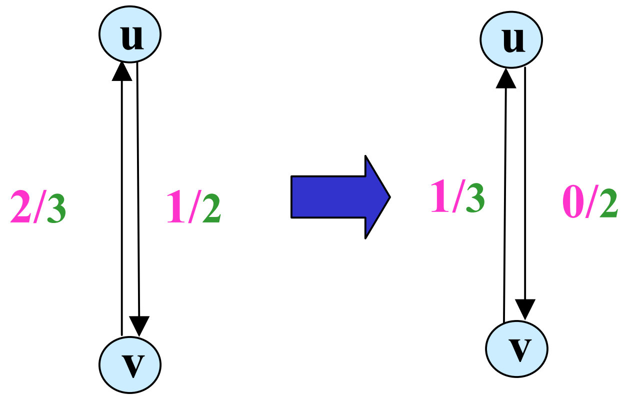
- Παράδειγμα: Θετική ροή για το δίκτυο Δ:



Θετικές ροές σε δίκτυα ροής

- Θα λέμε ότι η θετική ροή p(u,v) πηγαίνει από τον κόμβο u στον κόμβο v.

- *Αρχή απαλοιφής της θετικής ροής:*
  Αφαιρώντας 1 από τη θετική ροή μεταξύ των u και v και προς τις δύο κατευθύνσεις, παίρνουμε μια νέα συνάρτηση η οποία είναι επίσης θετική ροή:
  - αφού οι θετικές ροές μειώνονται, ο περιορισμός χωρητικότητας εξακολουθεί να ικανοποιείται, και
  - η διατήρηση της ροής εξακολουθεί να ισχύει.



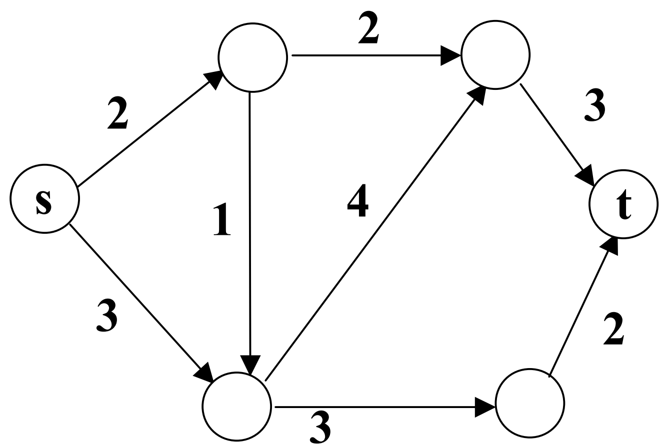
Δίκτυα Ροής

- Μια ***ροή*** πάνω στο δίκτυο G είναι μια συνάρτηση $f : V \times V \rightarrow \Re$ που ικανοποιεί τα εξής:

  1. f(u,v) ≤ c(u,v), για κάθε u,v∈ V
     (περιορισμός χωρητικότητας)

  2. για κάθε u ∈ V – {s,t} $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$
     (διατήρηση ροής)

  3. για κάθε u, v ∈ V f(u,v) = –f(v,u)
     (διαγώνια συμμετρία)



Δίκτυα Ροής

Θεώρημα: Οι ορισμοί θετικής ροής και ροής είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη

Ορισμός ροής συναρτήσει θετικής ροής.

Ορίζουμε $f(u,v) \equiv p(u,v) - p(v,u)$, για κάθε $u,v \in V$

- *Περιοριστικός χωρητικότητας για την f:*

$$\begin{aligned} f(u,v) &= p(u,v) - p(v,u) \\ &\leq p(u,v) \\ &\leq c(u,v) \end{aligned}$$

- *Διατήρηση ροής για την f:*

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} f(u,v) &= \sum_{v \in V} (p(u,v) - p(v,u)) \\ &= \sum_{v \in V} p(u,v) - \sum_{v \in V} p(v,u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

από τη διατήρηση ροής για την p.

Δίκτυα Ροής

- *Διαγώνια συμμετρία για την f:*

$$\begin{aligned} f(u,v) &= p(u,v) - p(v,u) \\ &= -(p(v,u) - p(u,v)) \\ &= -f(v,u) \end{aligned}$$

Ορισμός θετικής ροής συναρτήσει ροής:

Ορίζουμε για κάθε u,v $\in$ V

$$p(u,v) \equiv \begin{cases} f(u,v), & \text{if } f(u,v) > 0 \\ 0, & \text{if } f(u,v) \leq 0 \end{cases}$$

- *Περιορισμός χωρητικότητας για την p:*

  Αν f(u,v)>0 , p(u,v) = f(u,v) ≤ c(u,v), από τον περιορισμό χωρητικότητας για την f, διαφορετικά, αν f(u,v)≤0, αφού η c είναι μη αρνητική, p(u,v) = 0 ≤ c(u,v).

Δίκτυα Ροής

- *Διατήρηση ροής για την p:*

$$\sum_{v \in V} p(v,u) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(v,u)>0}} f(v,u)$$

$$= \sum_{\substack{v \in V \\ -f(u,v)>0}} (-f(u,v))$$ Διαγώνια συμμετρία

$$= -\sum_{\substack{v \in V \\ -f(u,v)>0}} f(u,v)$$

$$= \sum_{\substack{v \in V \\ f(u,v)>0}} f(u,v)$$ Διατήρηση ροής

$$= \sum_{v \in V} p(u,v)$$

$\blacksquare$

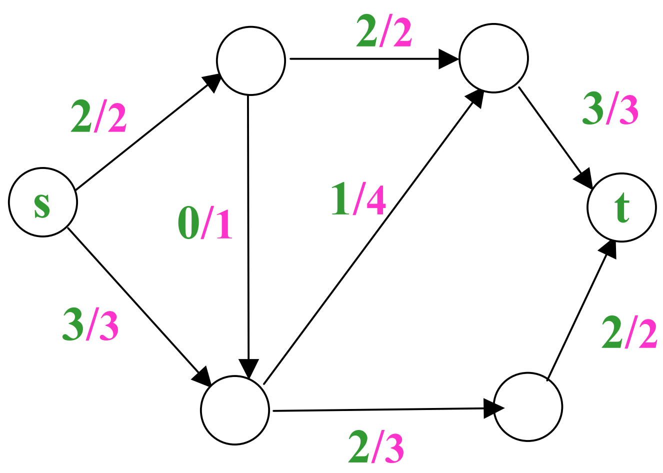
Πρόβλημα της μέγιστης ροής

- Ορίζουμε τη τιμή μιας ροής f, |f| ως

$$| f | = \sum_{v \in V} f(s,v)$$

- Πρόβλημα της μέγιστης ροής: Να βρεθεί η ροή με τη μέγιστη τιμή.

- Παράδειγμα: Μέγιστη ροή στο δίκτυο Δ.



Ιδιότητες Ροών

- Συμβολισμός: Από τώρα και στο εξής, μια συνάρτηση πάνω σε σύνολα θα συμβολίζει το άθροισμα της συνάρτησης πάνω στα στοιχεία των συνόλων.

  π.χ.
  1. $f(s,V) = |f|$
  2. Πρόταση διατήρησης ροής: για κάθε $u \in V - \{s,t\}$, $f(u,V) = 0$.

Λήμμα 1:

Για κάθε $X \subseteq V$, $f(X,X)=0$.

Απόδειξη:

- $$f(X,X) = \sum_{u \in X} f(u,X) = \sum_{u \in X} \sum_{v \in X} f(u,v) = 0$$

αφού το κάθε f(u,v) διαγράφεται με το f(v,u) λόγω της διαγώνιας συμμετρίας. ■

Ιδιότητες Ροών

Λήμμα 2: Για κάθε X,Y⊆V, f(X,Y) = – f(Y,X).

Απόδειξη:

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{u\in X \\ v\in Y}} f(u,v)$$

$$= -\sum_{\substack{v\in Y \\ u\in X}} f(v,u)$$

$$= -f(Y,X)$$ από τη διαγώνια συμμετρία της f. ∎

Λήμμα 3: Για κάθε X,Y,Z⊆V, όπου X∩Y=∅, f(X∪Y,Z) = f(X,Z) + f(Y,Z).

Απόδειξη:

$$f(X\cup Y,Z) = \sum_{\substack{u\in X\cup Y \\ v\in Z}} f(u,v)$$

$$= \sum_{\substack{u\in X \\ v\in Z}} f(u,v) + \sum_{\substack{u\in Y \\ v\in Z}} f(u,v)$$

$$= f(X,Z) + f(Y,Z)$$ ∎

Ιδιότητες Ροών

Λήμμα 4: $|f| = f(V,t)$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
|f| &= f(s,V) && \text{(από ορισμό)} \\
&= f(V,V) - f(V-\{s\},V) && \text{(από Λήμμα 3)} \\
&= f(V,V-\{s\}) && \text{(από Λήμματα 1 και 2)} \\
&= f(V,t) + f(V,V-\{s,t\}) && \text{(από “Λήμμα 3”)} \\
&= f(V,t) - f(V-\{s,t\},V) && \\
&= f(V,t) - \sum_{u \in V-\{s,t\}} f(u,V) && \\
&= f(V,t) - \sum_{u \in V-\{s,t\}} 0 && \\
&= f(V,t) && \blacksquare
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες Ροών

- Μια ***τομή*** (S,T) είναι μια διαμέριση του συνόλου V (δηλαδή, $V=S\cup T$, $S\cap T=\varnothing$), τέτοια ώστε $s\in S$, $t\in T$.
- Η ***ροή κατά μήκος*** της τομής (S,T) ορίζεται ως: f(S,T)
- Η ***χωρητικότητα κατά μήκος της τομής*** (S,T) ορίζεται ως: c(S,T)

Λήμμα 5:

Για κάθε ροή f και κάθε τομή (S,T), η ροή κατά μήκος της τομής (S,T) είναι ίση με την τιμή της ροής f, |f |.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-\{s\},V) \\ &= f(s,V) + \sum_{u\in S-\{s\}} f(u,V) \\ &= f(s,V) \end{aligned}$$

Ιδιότητες Ροών

Λήμμα 6:

Για κάθε ροή f και κάθε τομή (S,T), η τιμή της ροής φράσσεται από πάνω από τη χωρητικότητα κατά μήκος της τομής (S,T).

Απόδειξη:

$$|f| = f(S,T)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v)$$

$$\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

$$= c(S,T)$$

■

Δίκτυο Περίσσειας

- Έστω ένα δίκτυο ροής G=(V,E) και μια ροή f πάνω στο G.
- Για ένα ζευγάρι κορυφών u, v$\in$V ορίζουμε

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

το οποίο ονομάζουμε την *περίσσεια χωρητικότητα* του ζεύγους (u,v).

- Το δίκτυο περίσσειας $G_f = (V, E_f)$ που επάγεται από τη ροή ενός δικτύου ορίζεται ως εξής:

$$E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$$

- Δηλαδή ένα δίκτυο περίσσειας που επάγεται από μια ροή περιέχει τις ακμές που μπορούν να δεχθούν περισσότερη ροή.

Παρατηρήσεις

1. Δεν ισχύει απαραίτητα ότι $E_f \subseteq E$.
   π.χ. αν $(v,u) \in E$ με $f(v,u)>0$, αλλά $(u,v) \notin E$, τότε
   $c(u,v) = 0$, και
   $c_f(u,v) = 0 - f(u,v) = f(v,u) > 0$
   οπότε $(u,v) \in E_f$.
2. $|E_f| \leq 2 \cdot |E|$
   Αν $(u,v) \in E_f$, τότε $(u,v) \in E$ ή $(v,u) \in E$.

Λήμμα 7

Έστω f μια ροή στο δίκτυο G και f΄ μια ροή πάνω στο δίκτυο G_f. Τότε η συνάρτηση $f+f' : V \times V \rightarrow R$, όπου

$$(f+f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v)$$

είναι μια ροή στο δίκτυο G με τιμή $|f+f'| = |f| + |f'|$.

Απόδειξη

1. *διαγώνια συμμετρία*

$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) \\
&= \{\text{διαγώνια συμμετρία για } f, f'\} \\
&\quad - f(v,u) - f'(v,u) \\
&= -(f(v,u) + f'(v,u)) \\
&= -(f + f')(v,u)
\end{aligned}
$$

2. *περιορισμός της χωρητικότητας*

$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) \\
&\le f(u,v) + c_f(u,v) \\
&= f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) \\
&= c(u,v)
\end{aligned}
$$

Απόδειξη

3. *διατήρηση της ροής*

   Για κάθε u∈ V – {s,t}

$$\sum_{v\in V}(f+f')(u,v)=\sum_{v\in V}(f(u,v)+f'(u,v))$$

$$=\sum_{v\in V}f(u,v)+\sum_{v\in V}f'(u,v)$$

$$=0$$

Άρα η f+f′ είναι μια ροή πάνω στο G.

Επιπλέον, ισχύει

$$|f+f'|=\sum_{v\in V}(f+f')(s,v)$$

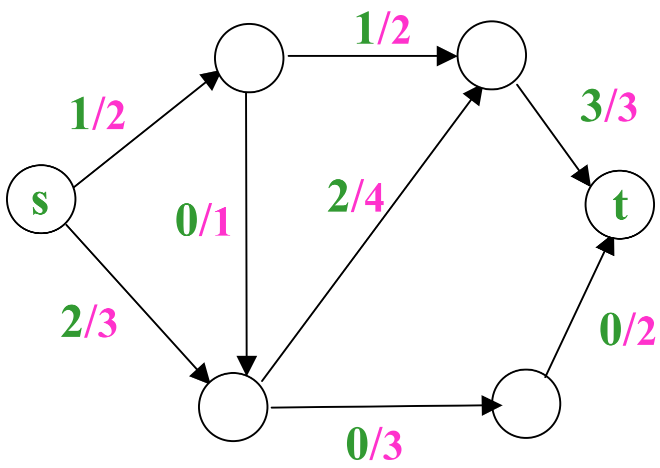
$$=\sum_{v\in V}f(s,v)+\sum_{v\in V}f'(s,v)$$

$$=|f|+|f'|$$

Δίκτυα Περίσσειας

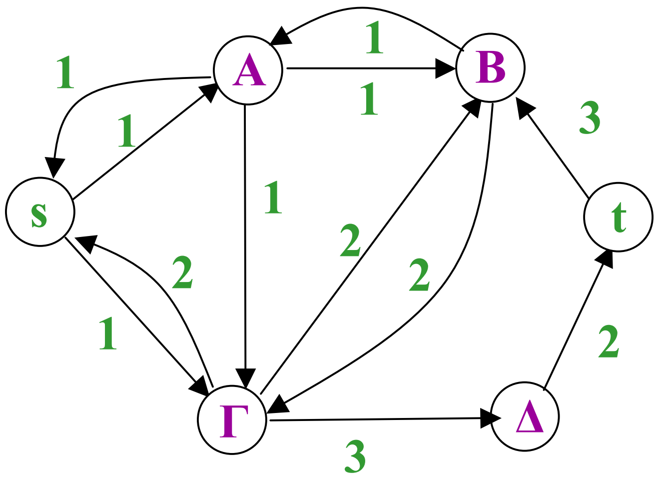
- Ένα μονοπάτι p από την πηγή s στον προορισμό t στο δίκτυο περίσσειας θα ονομάζεται ένα ***επεκταμένο μονοπάτι*** ως προς τη ροή f.

- Παράδειγμα: Θεωρήστε την πιο κάτω ροή για το δίκτυο Δ:



Δίκτυα Περίσσειας

- Το δίκτυο περίσσειας που επάγεται από τη ροή είναι:



- Άρα το μονοπάτι s→Γ→Δ→ t είναι ένα επεκταμένο μονοπάτι ως προς τη ροή.

- Με δεδομένο ένα επεκταμένο μονοπάτι p ως προς τη ροή f, θα ορίσουμε μια ροή πάνω στο G μεγαλύτερης τιμής από την f κατά

$$c_f(p) = \min_{(u,v)\in p} c_f(u,v)$$

Δίκτυα Περίσσειας

- Με δεδομένο ένα επεκταμένο μονοπάτι p, ορίζουμε την πιο κάτω συνάρτηση:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p), & \text{if } (u,v) \in p \\ -c_f(p), & \text{if } (v,u) \in p \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Λήμμα 8

Η f_p είναι μια ροή πάνω στο δίκτυο περίσσειας G_f με τιμή $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Λήμμα 9

Η συνάρτηση $f' = f + f_p$ είναι μια ροή πάνω στο δίκτυο G με τιμή $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.

Απόδειξη, προφανής από τα δύο προηγούμενα λήμματα.

Θεώρημα Μέγιστης Ροής

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστη ροή = ελάχιστη χωρητικότητα)

Έστω f μια ροή πάνω στο δίκτυο G. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι μια μέγιστη ροή πάνω στο G.
2. Το δίκτυο περίσσειας G_f δεν περιέχει επεκταμένα μονοπάτια.
3. $|f| = c(S,T)$ για κάποια τομή (S,T) του δικτύου G.

Απόδειξη:

- $1 \Rightarrow 2$

  Αν το δίκτυο περίσσειας περιέχει κάποιο επεκταμένο μονοπάτι τότε από το Λήμμα 9, η συνάρτηση $f + f_p$ είναι ροή πάνω στο G με τιμή $> |f|$. Αντίφαση

- $2 \Rightarrow 3$

  Έστω ότι το δίκτυο δεν περιέχει επεκταμένο μονοπάτι. Θέτουμε

  $S=\{v \in V \mid$ υπάρχει μονοπάτι από την s στον κόμβο v στο δίκτυο $\}$
  και $T=V-S$

Θεώρημα Μέγιστης Ροής

Η διαμέριση (S,T) είναι τομή:

– $s \in S$, εμφανές από τον ορισμό του S
– $t \in T$, διαφορετικά θα υπήρχε κάποιο επεκταμένο μονοπάτι.

Για κάθε ζευγάρι κορυφών $u \in S$, $v \in T$, $f(u,v)=c(u,v)$, διότι αλλοιώς

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) > 0$$

οπότε $(u,v) \in E_f$ και $v \in S$.

Άρα $f(S,T) = c(S,T)$, και από το Λήμμα 5, $|f| = f(S,T)$ και $|f| = c(S,T)$ όπως χρειάζεται.

- (3)⇒(1)

Από το Λήμμα 6,

$|f| \leq c(S,T)$ για κάθε τομή (S,T). Αν ισχύει $|f| = c(S,T)$ προφανώς η f είναι μια μέγιστη ροή πάνω στο δίκτυο.

■

Γενική Μεθοδολογία Ford-Fulkerson

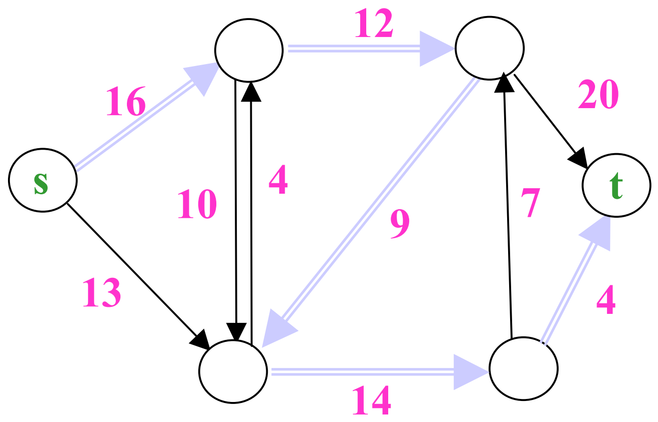
```
for all (u,v)∈E
    f(u,v)=0;
    f(v,u)=0,

while there exists path p in G_f
    c = c_f(p);
    for all (u,v)∈p
          f(u,v) = f(u,v) + c
          f(v,u) = - f(u,v)
```

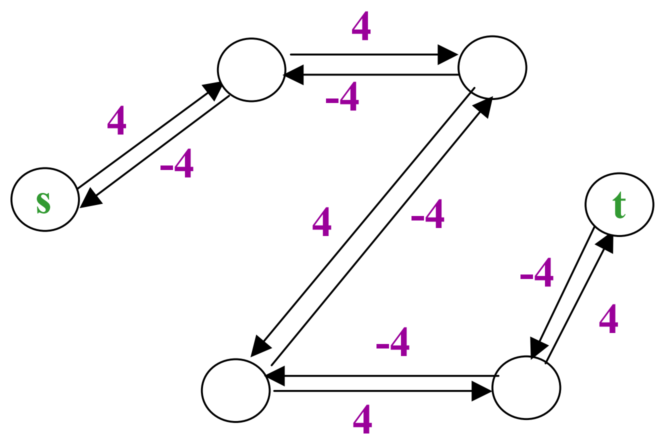
- Δηλαδή:
  1. δώσε αρχική τιμή 0 στη ροή f για κάθε ζευγάρι κορυφών.
  2. όσο υπάρχει επεκταμένο μονοπάτι p στο δίκτυο, αύξησε τη ροή κατά c_f (p) πάνω στο μονοπάτι p.

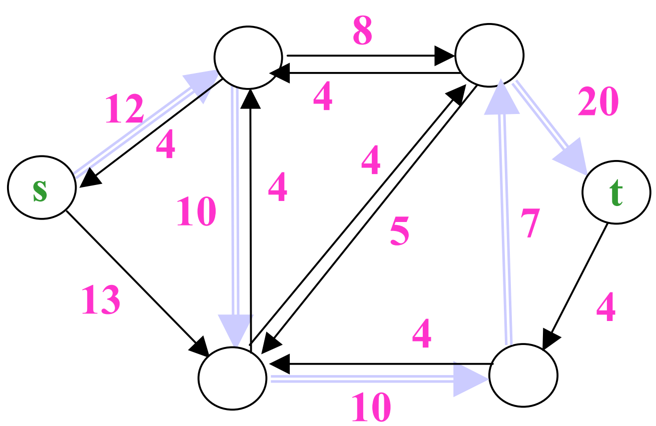
Παράδειγμα

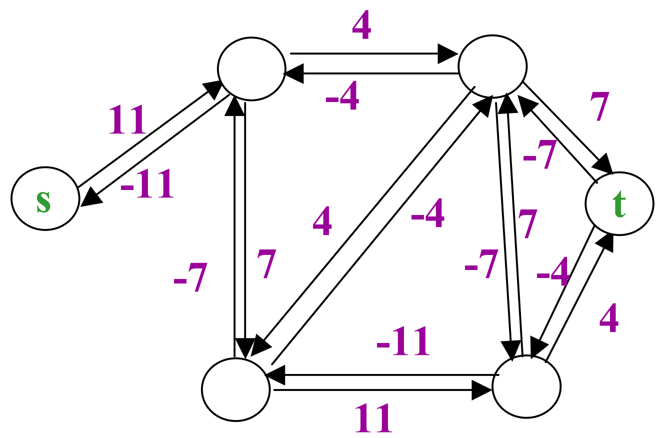
ΔΙΚΤΙΟ ΠΕΡΙΣΣΕΙΑΣ

ΡΟΗ





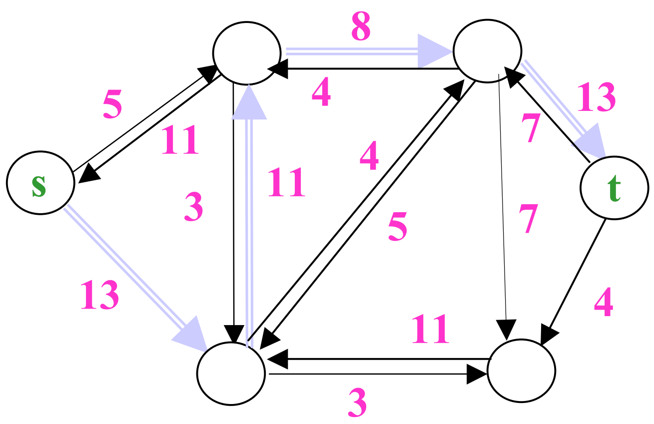


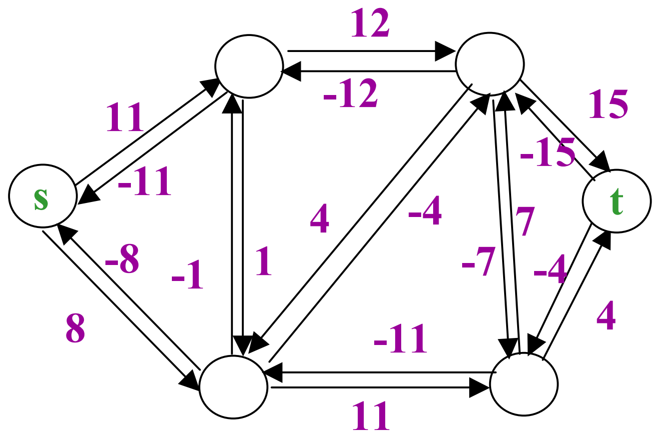


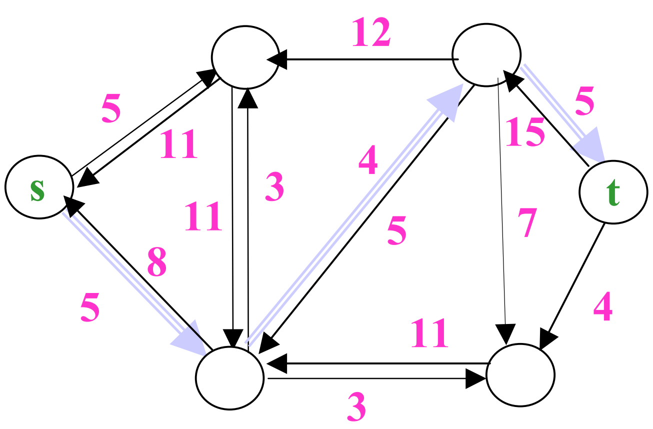
Παράδειγμα

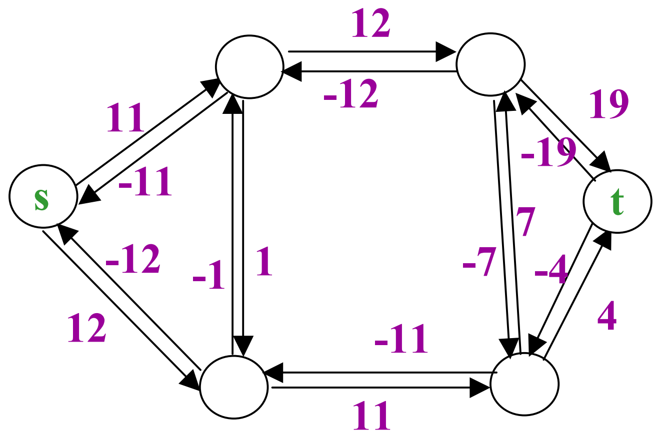
ΔΙΚΤΙΟ ΠΕΡΙΣΣΕΙΑΣ

ΡΟΗ



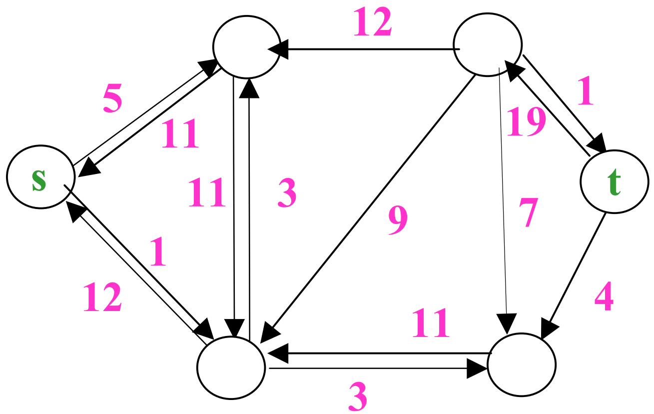






Παράδειγμα

ΔΙΚΤΙΟ ΠΕΡΙΣΣΕΙΑΣ



Δεν υπάρχει άλλο επεκταμένο μονοπάτι.

Χρόνος Εκτέλεσης της μεθοδολογίας

- Έστω ότι όλες οι χωρητικότητες είναι ακέραιοι, οπότε η τιμή της μέγιστης ροής f* είναι ακεραίος.
- Τότε γίνονται το πολύ f* επαναλήψεις (η ροή αυξάνεται τουλάχιστον κατά 1 σε κάθε επανάληψη) και

  κάθε επανάληψη απαιτεί χρόνο Θ(|E|), υποθέτοντας ότι το επεκταμένο μονοπάτι αύξησης βρίσκεται με αναζήτηση κατά βάθος ή κατά πλάτος.
- Άρα ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης είναι O(f*·|E|).
- Κακός: δεν είναι φραγμένος από συνάρτηση του μεγέθους του δικτύου.

Αλγόριθμος Edmonds-Karp

- Εξιδείκευση της μεθοδολογίας Ford-Fulkerson όπου ένα επεκταμένο μονοπάτι βρίσκεται με διερεύνηση κατά πλάτος, δηλαδή κάθε φορά επιλέγεται το βραχύτερο μονοπάτι μεταξύ των s και t.

- Έστω $\delta(v) = \delta_f(s,v)$ η απόσταση από τον s στον v στο δένδρο που παράγεται κατά την αναζήτηση κατά πλάτος αρχίζοντας από τον s, στο δίκτυο περίσσειας G_f.

- Κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου Edmonds-Karp, κάθε καινούρια επέκταση της ροής οδηγεί σε ανανέωση του $\delta(v)$, έτσι έχουμε μια ακολουθία από τιμες $\delta(v)$, μια τιμή για κάθε επέκταση

Αλγόριθμος Edmonds-Karp

Λήμμα 4:

Η ακολουθία των τιμών $\delta(v)$ αυξάνει μονοτονικά κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου.

Απόδειξη

- Έστω ροή f η οποία σε κάποια φάση της εκτέλεσης του αλγόριθμου Edmonds-Karp επεκτείνεται στη ροή f΄.

- Έστω $\delta'(v)= \delta_{f'}(s,v)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\delta'(v)\geq\delta(v)$, για κάθε κόμβο v.

- Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι $\delta'(v) < \delta(v)$ για κάποιο κόμβο v. Έστω ότι $\delta'(v)$ είναι το ελάχιστο μεταξύ όλων των $\delta'(v')$ για τα οποία $\delta'(v')<\delta(v')$.

- Έστω το βραχύτερο μονοπάτι

  $s \Rightarrow u \rightarrow v$

  στο δίκτυο περίσσειας G_f.

Αλγόριθμος Edmonds-Karp

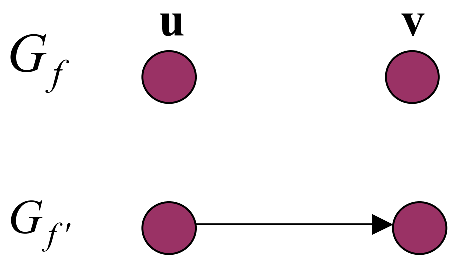
- Το μέρος $s \Rightarrow u$ του μονοπατιού $s \Rightarrow u \rightarrow v$ πρέπει να αποτελεί βραχύτερο μονοπάτι από τον s στον u.
- Συνεπώς, $\delta'(v) = \delta'(u) + 1$,
  δηλαδή, $\delta'(u) < \delta'(v)$. Από υπόθεση θα πρέπει να είναι $\delta(u) \leq \delta'(u)$.
- Θεωρούμε την ακμή $(u,v) \in E_{f'}$.
- Ανήκει στο E_f;
- Έστω ότι ανήκει, δηλαδή $f(u,v)<c(u,v)$.
- Τότε

$$\begin{aligned} \delta(v) &\leq \delta(u) + 1 \\ &\leq \delta'(u) + 1 \\ &= \delta'(v) \end{aligned}$$

- Αντίφαση!

Αλγόριθμος Edmonds-Karp

- Συνεπώς, $(u,v) \notin E_f$, αλλά $(u,v) \in E_{f'}$.



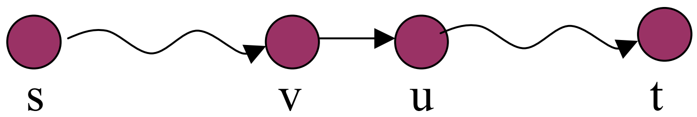
πριν

την επέκταση

μετά

- Πρέπει να είναι $(v,u) \in E_f$.

- Επίσης πρέπει η (v,u) να ανήκει στο επεκταμένο μονοπάτι p του δικτύου περίσσειας G_f(διαφορετικά, δεν θα μπορούσε να επάγει την ακμή (u,v) στο δίκτυο περίσσειας $G_{f'}$).



- Αφού το p είναι μονοπάτι σε δένδρο αναζήτησης κατά πλάτος,

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \delta(u) - 1 \\ &\leq \delta'(u) - 1 \\ &= \delta'(v) - 1 - 1 \\ &< \delta'(v) \end{aligned}$$

Αντίφαση!

Χρόνος Εκτέλεσης

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο αριθμός των επεκτάσεων ροής σε οποιαδήποτε εκτέλεση του αλγόριθμου Edmonds-Karp είναι $O(|V|\cdot|E|)$.

Απόδειξη

- Έστω ένα μονοπάτι επέκτασης p, ακμή (u,v) πάνω στο p τέτοια ώστε $c_f(p) = c_f(u,v)$. Λέμε ότι η ακμή (u,v) είναι μια *κρίσιμη ακμή*.
- Παρατήρηση: μια κρίσιμη ακμή "εξαφανίζεται" από το δίκτυο περίσσειας μετά από την επέκταση της ροής.
- Την πρώτη φορά που η ακμή (u,v) γίνεται κρίσιμη, θα πρέπει να ισχύει

  $$\delta(v) = \delta(u) + 1$$

  αφού το μονοπάτι p είναι βραχύτερο μονοπάτι.
- Πως μπορεί η ακμή (u,v) να ξαναγίνει κρίσιμη;

Χρόνος Εκτέλεσης

- Θα πρέπει να γίνει κρίσιμη εξαιτίας ροής πάνω στην ακμή (v,u) όταν η τελευταία βρεθεί πάνω σε ένα επεκταμένο μονοπάτι. Έστω δ΄ η συνάρτηση απόστασης στο δίκτυο περίσσειας τη στιγμή που η (v,u) βρίσκεται πάνω σε ένα επεκταμένο μονοπάτι. Θα έχουμε

$\delta'(u) = \delta'(v) + 1$ (αφού η (u,v) βρίσκεται πάνω σε ένα βραχύτερο μονοπάτι)

$\geq \delta(v) + 1$

$= \delta(u) + 1 + 1$

$= \delta(u) + 2$

- Αφού η δ(u) αυξάνεται τουλάχιστον κατά 2 κάθε φορά που η (u,v) γίνεται κρίσιμη, η δ(u) είναι μη αρνητική, μονοτονικά αύξουσα και < |V|,

  τότε

  η ακμή (u,v) μπορεί να γίνει κρίσιμη το πολύ O(|V|) φορές.

Χρόνος Εκτέλεσης

- Σε κάθε επέκταση τουλάχιστον μια ακμή γίνεται κρίσιμη και υπάρχουν $|E|$ ακμές.

- Συνεπώς, ο αριθμός των επεκτάσεων ροής είναι $O(|V|\cdot|E|)$. Κάθε επέκταση στοιχίζει επιπλέον $O(|E|)$ για μια αναζήτηση κατά πλάτος.

- Συνολικό κόστος: $O(|V|\cdot|E|^2)$