

**ΕΠΛ 232: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα**

Κατ'οίκον Εργασία 3

Ημερομηνία Παράδοσης: 08/04/02

- (α) Να προτείνετε αλγόριθμο ο οποίος, με δεδομένο εισόδου ένα σύνολο από n ευθύγραμμα τμήματα, να υπολογίζει ελάχιστο κυρτό πολύγωνο S τέτοιο ώστε κάθε σημείο των n ευθυγράμμων τμημάτων βρίσκεται είτε πάνω στο σύνορο του S είτε στο εσωτερικό του. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Έστω P ένα μη κυρτό πολύγωνο με n κορυφές. Να προτείνετε αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει το κυρτό περίβλημα του P σε χρόνο $O(n)$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

(γ) Έστω P ένα σύνολο από n σημεία. Ονομάζουμε *βάθος* ενός σημείου $p \in P$ το πλήθος των κυρτών περιβλημάτων που πρέπει να αφαιρεθούν έτσι ώστε το p να ανήκει στο κυρτό περίβλημα των σημείων που απομένουν. Να δώσετε αλγόριθμο πολυπλοκότητας $O(n^2)$ ο οποίος υπολογίζει το βάθος όλων των σημείων του P .
- Έστω σημεία $p_1=(x_1,y_1)$ και $p_2=(x_2,y_2)$. Η L_∞ απόσταση ανάμεσα στα σημεία ορίζεται ως την τιμή $\max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$. Να προτείνετε παραλλαγή του αλγορίθμου Closest-Pairs ο οποίος, με δεδομένο εισόδου n σημεία, να βρίσκει και να επιστρέφει το κοντινότερο ζεύγος σημείων ως προς την L_∞ μεταξύ τους απόσταση.
- Θεωρήστε μια λίστα από n στοιχεία. *Πολλαπλότητα* ενός στοιχείου x της λίστας ονομάζουμε το πλήθος των εμφανίσεων του x στη λίστα και *συρμό* της λίστας οποιοδήποτε στοιχείο της λίστας έχει μέγιστη πολλαπλότητα.

(α) Να δώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος με δεδομένο εισόδου μια λίστα να αποφασίζει κατά πόσο ο συρμός της λίστας είναι ίσος με 1.

(β) Να δώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος με δεδομένο εισόδου μια λίστα μήκους n να αποφασίζει σε χρόνο $O(n)$ κατά πόσο η πολλαπλότητα του συρμού της λίστας είναι μεγαλύτερη του $n/2$.

(γ) Υποθέστε ότι ο συρμός μιας λίστας με n στοιχεία έχει πολλαπλότητα τουλάχιστον k . Να δώσετε αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει το συρμό της λίστας σε χρόνο $O(n \lg(n/k))$.
- Στον αλγόριθμο επιλογής των Blum, Floyd, Pratt, Rivest και Tarjan ο πίνακας χωρίζεται σε υποπίνακες μεγέθους 5. Να ελέγξετε κατά πόσο ο αλγόριθμος εξακολουθεί να είναι γραμμικός αν το μέγεθος των υποπινάκων ήταν 3, 7 και 9. Πως αναμένετε να επηρεάζεται ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου όσο το μέγεθος των υποπινάκων αυξάνεται και γιατί;
- Θεωρήστε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι που παίζεται σε σχάρα η οποία αποτελείται από n στήλες. Κάθε στήλη περιέχει δύο αριθμούς, ο πρώτος από τους οποίους είναι ένα θετικός ακέραιος και ο δεύτερος ένας από τους αριθμούς 1, 2, και 3. Στόχος του παιχνιδιού είναι η μετάβαση (μέσω μιας ακολουθίας κινήσεων προς τα δεξιά) από την



πρώτη (αριστερότερη) στήλη στην τελευταία (n-ιοστή και δεξιότερη) στήλη. Υποθέτουμε ότι οι κανόνες του παιχνιδιού επιβάλλουν τα εξής: Για κάθε στήλη, ο πρώτος αριθμός που περιέχεται στη στήλη συμβολίζει το κόστος που μας στοιχίζει η επίσκεψη στη συγκεκριμένη στήλη και ο δεύτερος τον μέγιστο αριθμό στηλών που μπορούμε να περπάσουμε προς τα δεξιά κατά την επόμενη μετακίνηση. Κόστος ενός παιχνιδιού ορίζουμε το άθροισμα των κοστών των στηλών από τις οποίες περνά ο παίκτης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Υποθέτοντας ότι η σχάρα του παιχνιδιού υλοποιείται ως ο πίνακας $B[n,2]$, όπου για κάθε στήλη i , $B[i,1]$ συμβολίζει το κόστος της στήλης i και $B[i,2]$ ο μέγιστος αριθμός στηλών που μπορούν να υπερπηδηθούν κατά την επόμενη κίνηση από τη στήλη i , η πιο κάτω διαδικασία υπολογίζει και επιστρέφει το ελάχιστο κόστος παιχνιδιού πάνω στη σχάρα B από τη στήλη i .

Cheapest(i)

```
If  $i > n$  return 0;  
x =  $B[i,1]$  + Cheapest( $i+1$ );  
y =  $B[i,1]$  + Cheapest( $i+2$ );  
z =  $B[i,1]$  + Cheapest( $i+3$ );  
if  $B[i,2]=1$  return x;  
if  $B[i,2]=2$  return min(x,y);  
if  $B[i,2]=3$  return min(x,y,z);
```

(α) Να αναλύσετε το χρόνο εκτέλεσης της διαδικασίας.

(β) Να προτείνετε αποδοτικότερο αλγόριθμο για εύρεση του ελάχιστου κόστους παιχνιδιού στη σχάρα. (Υπόδειξη: Δυναμικός Προγραμματισμός)

(γ) Να επεκτείνετε τον αλγόριθμό σας έτσι ώστε να βρίσκει όχι μόνο το ελάχιστο κόστος παιχνιδιού αλλά και τις στήλες από τις οποίες περνά το παιχνίδι αυτό. Ποιος ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας;