Κατ’οίκον Εργασία 2

Ημερομηνία Παράδοσης: 22/03/02

1. Εκπρόσωποι από N χώρες X_1, X_2, ..., X_N, θα παρευρεθούν σε ένα δείπνο και καλείστε να τους τοποθετήσετε σε M τραπέζια, T_1, T_2, ..., T_M, έτσι ώστε, με στόχο την ενίσχυση των δεσμών ανάμεσα στις χώρες, να μην καθήσουν περισσότερα από ένα άτομα από την ίδια χώρα στο ίδιο τραπέζι. Υποθέτοντας ότι, για κάθε i, η χώρα X_i έχει A_i εκπροσώπους, και, για κάθε j, στο τραπέζι T_j μπορούν να καθήσουν B_j άτομα, να γράψετε αλγόριθμο που βρίσκει τοποθέτηση των ατόμων σε τραπέζια που ικανοποιεί τις προδιαγραφές του προβλήματος, αν μια τέτοια τοποθέτηση υπάρχει.

   Να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

2. (α) Σας δίδεται ένα δίκτυο ροής αρκετές ακμές του οποίου έχουν απεριόριστη χωρητικότητα. Να δώσετε αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει την ελάχιστη χωρητικότητα που μπορούν να έχουν οι ακμές αυτές χωρίς να επηρεάζεται η μέγιστη ροή του δικτύου.
   (β) Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι αληθείς; Να δώσετε απόδειξη για όλες τις αληθείς προτάσεις διαφορετικά κάποιο αντιπαράδειγμα.
   (i) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E). Για κάθε μέγιστη ροή f του G ισχύει ότι για κάθε ζεύγος (u,v), $u,v\in V$, είτε $f(u,v)=0$, είτε $f(v,u)=0$.
   (ii) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E). Υπάρχει μέγιστη ροή f του G τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος (u,v), $u,v\in V$, είτε $f(u,v)=0$, είτε $f(v,u)=0$.
   (iii) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E). Αν όλες οι ακμές του G έχουν διαφορετικές μεταξύ του χωρητικότητες, και (S,T) είναι η τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα κατά μήκος τομής του δικτύου, τότε για κάθε τομή του δικτύου (S’,T’), με $S\neq S'$ και $T\neq T'$, $c(S,T)< c(S',T')$. Δηλαδή η τομή (S,T) είναι η μοναδική τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα κατά μήκος τομής.
   (iv) Έστω δίκτυο ροής G = (V,E) και (S,T) η τομή με την ελάχιστη χωρητικότητα κατά μήκος τομής του δικτύου. Αν προσθέσουμε ποσότητα $b\in N$ στη χωρητικότητα κάθε ακμής $e\in E$ του δικτύου, τότε η (S,T) θα παραμείνει ελάχιστη τομή στο νέο δίκτυο.

3. (α) Σας δίνεται ένας κατευθυνόμενος γράφος, κάθε ακμή του οποίου έχει βάρος 1. Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος του Dijkstra επισκέπτεται τους κόμβους του γράφου με την ίδια σειρά όπως και ο αλγόριθμος διερεύνησης κατά πλάτος. Να χρησιμοποιήσετε αυτό το γεγονός για να εισηγηθείτε αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει τα βραχύτερα μονοπάτια από μια πηγή προς όλες τις κορυφές του γράφου σε χρόνο $O(|E| + |V|)$.
   (β) Σας δίνεται ένας κατευθυνόμενος άκυκλος γράφος. Να εισηγηθείτε αλγόριθμο ο οποίος να υπολογίζει τα βραχύτερα μονοπάτια από μια πηγή προς όλες τις κορυφές του γράφου σε χρόνο $O(|E| + |V|)$.

4. Σας δίνονται τα πολυώνυμα $f = \langle 0,1,2,3\rangle$ και $g = \langle 1, 0, 2, 0, -3\rangle$ σε παράσταση με συντελεστές. Να υπολογίσετε το γινόμενο των δύο πολυωνύμων $f\cdot g$, χρησιμοποιώντας

ταχύ μετασχηματισμό Fourier, δείχνοντας όλα τα στάδια της εργασίας σας δίνοντας το τελικό πολυώνυμο σε παράσταση με συντελεστές.

5. Πρόβλημα 26-1, σελίδα 576 από CLR.