
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Αναγωγές

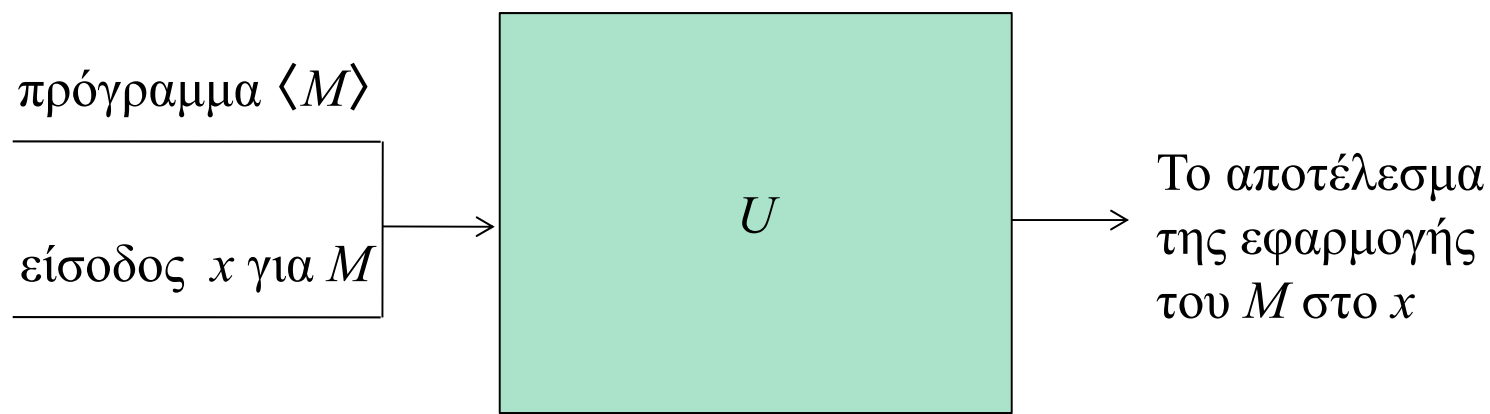
Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Ανεπίλυτα Προβλήματα από τη Θεωρία Γλωσσών (5.1)

- *Το Πρόβλημα της Περάτωσης*
- *Το Πρόβλημα της Κενότητας*
- *Το Πρόβλημα της Ισοδυναμίας*

Απεικονιστικές Αναγωγές (5.3)

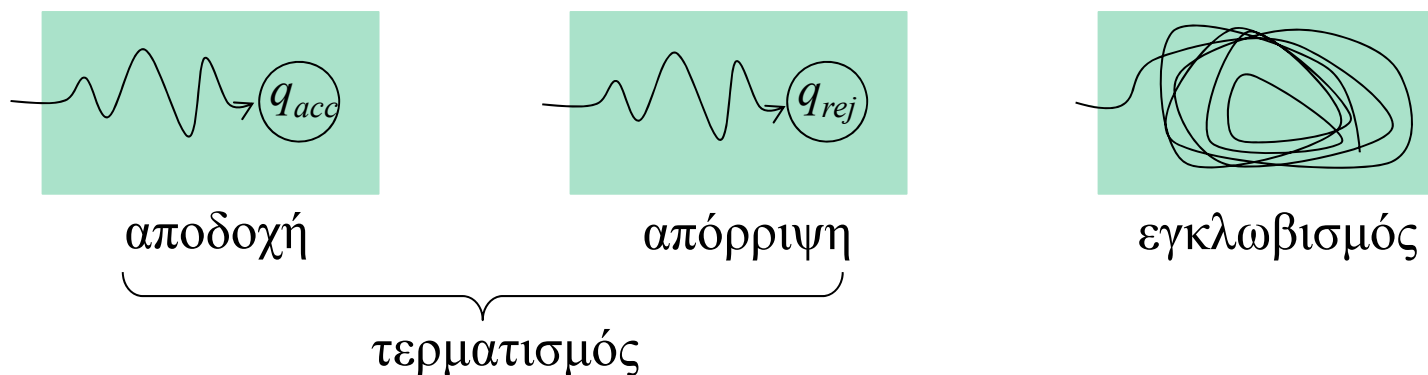
Από την προηγούμενη διάλεξη...



Η **Καθολική Μηχανή Turing** U παίρνει ως εισόδους ένα πρόγραμμα M και μια λέξη x και προσομοιώνει το M στο x .

Το πρόγραμμα M ορίζεται επίσης ως μια TM!

Από την προηγούμενη διάλεξη...



$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη } w \}$$

Αναγνωρίσιμη γλώσσα: Από καθολική TM U

Μη διαγνώσιμη γλώσσα: Θεώρημα του Turing

Το πρόβλημα της περάτωσης

$$\text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που τερματίζει στη λέξη } w\}$$

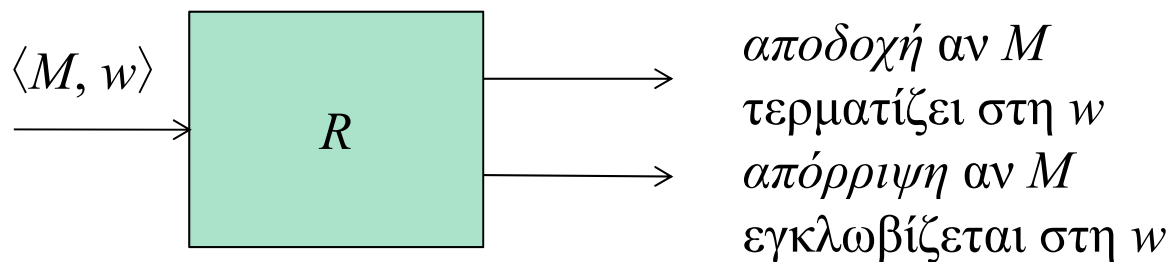
- Θα δείξουμε ότι: Η γλώσσα $\text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{\text{TM}}$ είναι μη διαγνώσιμη.
- Θα επιχειρηματολογήσουμε ως εξής:

Αν η γλώσσα $\text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{\text{TM}}$ είναι διαγνώσιμη, τότε,
η γλώσσα A_{TM} πρέπει επίσης να είναι διαγνώσιμη.

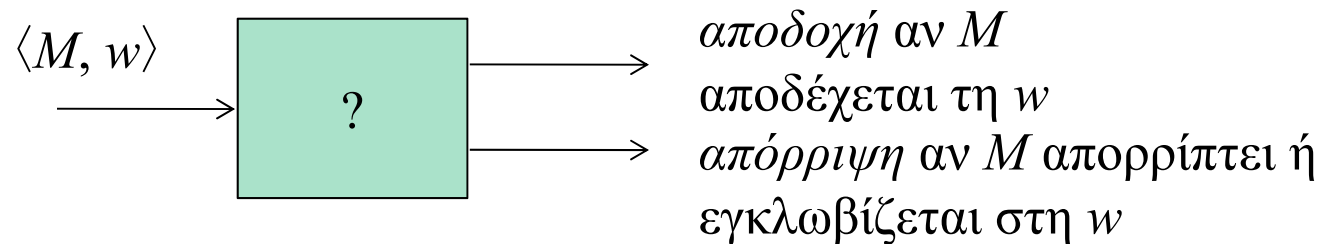
- Από το Θεώρημα του Turing γνωρίζουμε ότι το δεύτερο δεν ισχύει.
- Επομένως η γλώσσα $\text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{\text{TM}}$ είναι *μη διαγνώσιμη*.

ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}

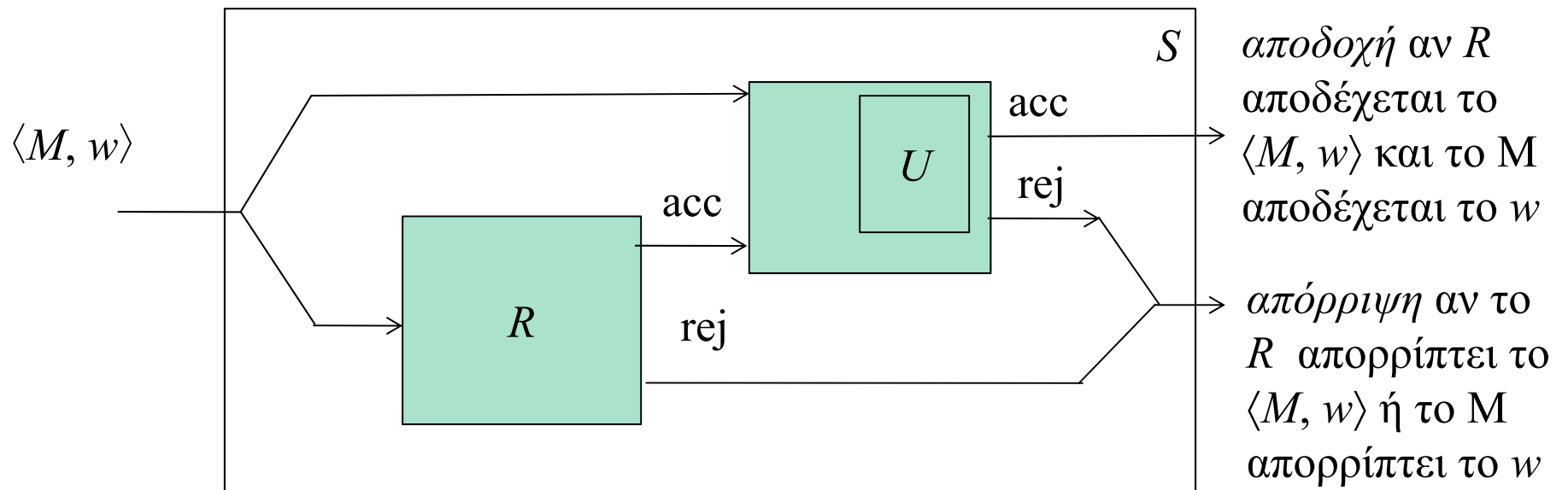
- Έστω ότι η γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM} είναι διαγνώσιμη.
- Τότε, υπάρχει μηχανή Turing, R , η οποία διαγιγνώσκει την ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}:



- Πως μπορούμε να αξιοποιήσουμε την R για να διαγνώσουμε την A_{TM} ;



ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}



ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}

$ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid \eta \ M \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ \mu\iota\alpha \ TM \ \mu\omicron\upsilon \ \tau\epsilon\rho\mu\alpha\tau\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota \ \sigma\tau\eta \ \lambda\acute{\epsilon}\xi\eta \ w \}$

$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid \eta \ M \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ \mu\iota\alpha \ TM \ \mu\omicron\upsilon \ \alpha\pi\omicron\delta\acute{\epsilon}\chi\epsilon\tau\alpha\iota \ \tau\eta \ \lambda\acute{\epsilon}\xi\eta \ w \}$

Ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM} είναι διαγνώσιμη και R μια TM που τη διαγιγνώσκει. Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε την πιο κάτω TM η οποία διαγιγνώσκει την A_{TM} :

$S =$ ‘Με είσοδο $\langle M, w \rangle$,
Τρέξε την R με είσοδο $\langle M, w \rangle$.
Αν η R απορρίψει, *απόρριψε*.
Αν η R αποδεχτεί τρέξε τη U με είσοδο $\langle M, w \rangle$
Αν η U αποδεχτεί, *αποδέξου*.
Αν η U απορρίψει, *απόρριψε*.’

Αντίφαση! Η A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη, επομένως και η ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM} είναι μη διαγνώσιμη

Μέθοδος Αναγωγής

- Στην απόδειξη μας χρησιμοποιήσαμε τη «Μέθοδο της Αναγωγής»
 - Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα είναι υπολογιστικά μη επιλύσιμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αναγωγή είναι η μετατροπή κάποιου προβλήματος σε κάποιο άλλο η οποία γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση του δεύτερου προβλήματος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του πρώτου.

- Λέμε ότι το πρόβλημα A μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα B αν υπάρχει αναγωγή από το A στο B,
 - δηλαδή, αν μπορούμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα A στο B έτσι ώστε επίλυση του B να επιλύει και το A.
 - Π.χ., η γλώσσα A_{TM} μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$: διάγνωση της $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ οδηγεί στη διάγνωση της A_{TM} .

Μέθοδος Αναγωγής – Παράδειγμα

- Θεωρήστε τα πιο κάτω προβλήματα:

Πρόβλημα Α:
Υπολόγισε την
περίμετρο ενός
τετραγώνου

Πρόβλημα Β:
Μέτρησε το μήκος
της πλευράς του
τετραγώνου

- Το πρόβλημα Α μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα Β:
 - Αν λύσω το Β τότε θα μπορώ να λύσω και το Α
- Επιπλέον:
 - Το Α δεν είναι δυσκολότερο πρόβλημα από το Β αφού το Β προσφέρει μια λύση για αυτό.

Μέθοδος Αναγωγής

- Αν ένα πρόβλημα A μπορεί να «αναχθεί» σε ένα πρόβλημα B τότε:
 - Αν το B είναι επιλύσιμο τότε και το A είναι επιλύσιμο
 - Αν το A είναι μη επιλύσιμο τότε και το B είναι μη επιλύσιμο
 - Σημείωση: Αν το B δεν είναι επιλύσιμο αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι και το A δεν είναι επιλύσιμο (δυνατόν να υπάρχει άλλη λύση για A).
- Μεθόδος Αναγωγής για επίδειξη της μη επιλυσιμότητας/μη διαγνωσιμότητας

Έστω γλώσσα Λ_1 . Για να δείξουμε ότι η Λ_1 είναι μη διαγνώσιμη:

 1. Εντοπίζουμε *μη διαγνώσιμη* γλώσσα Λ_2 τέτοια ώστε η Λ_2 να μπορεί να αναχθεί στη Λ_1 .
 2. Επιδεικνύουμε την αναγωγή: αν υπάρχει διαγνώστης για τη Λ_1 τότε υπάρχει διαγνώστης για τη Λ_2 .
 3. Αφού η Λ_2 είναι μη διαγνώσιμη καταλήγουμε σε αντίφαση.
 4. Επομένως, και η Λ_1 είναι μη διαγνώσιμη

Η αναγωγή στην απόδειξή μας

- Αναγωγή: Δείξαμε ότι η γλώσσα A_{TM} ανάγεται στην $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$
- Έστω ότι υπάρχει μια μηχανή R που διαγιγνώσκει την $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$.
- Με τη βοήθεια της R κατασκευάσαμε μια μηχανή S που διαγιγνώσκει την A_{TM} .
- Επομένως:
 - Αν η R διαγιγνώσκει την $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ τότε η S διαγιγνώσκει την A_{TM}
- Γνωρίζουμε όμως ότι η A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη
 - $\Rightarrow$ η S είναι αδύνατον να υπάρχει
 - $\Rightarrow$ η R είναι αδύνατον να υπάρχει
 - $\Rightarrow$ η $ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM}$ είναι μη διαγνώσιμη

Παράδειγμα 1

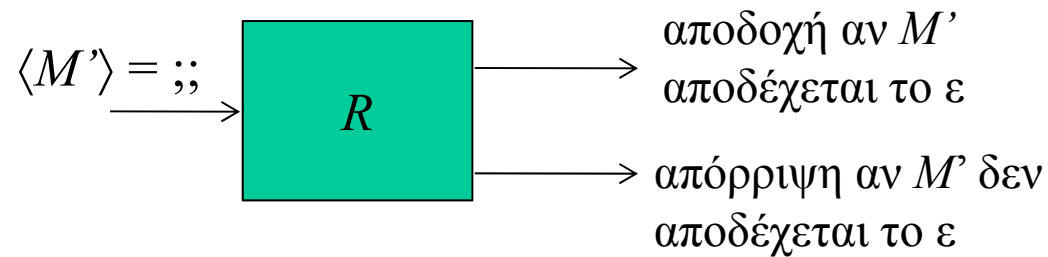
$$\text{ΑΠΟΔΟΧΗ}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid \eta \ M \ \text{είναι μια TM η οποία αποδέχεται το } \varepsilon\}$$

Η γλώσσα είναι διαγνώσιμη η  μη διαγνώσιμη ;;

- **Βήμα 1:** Εξοικείωση με τη γλώσσα και σύνδεση με γνωστά προβλήματα
 - Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η M αποδέχεται το ε , θα πρέπει να προσομοιώσουμε το ε στη M .
 - Είναι όμως δυνατό στην πορεία να εγκλωβιστούμε!
- **Βήμα 2:** Αποδεικνύουμε με τη Μέθοδο της Αναγωγής.
 - Αν δεν υπάρχει περίπτωση να εγκλωβιστούμε στο ε τότε δεν θα εγκλωβιστούμε σε καμιά λέξη.

Παράδειγμα 1 – Εντοπισμός της αναγωγής

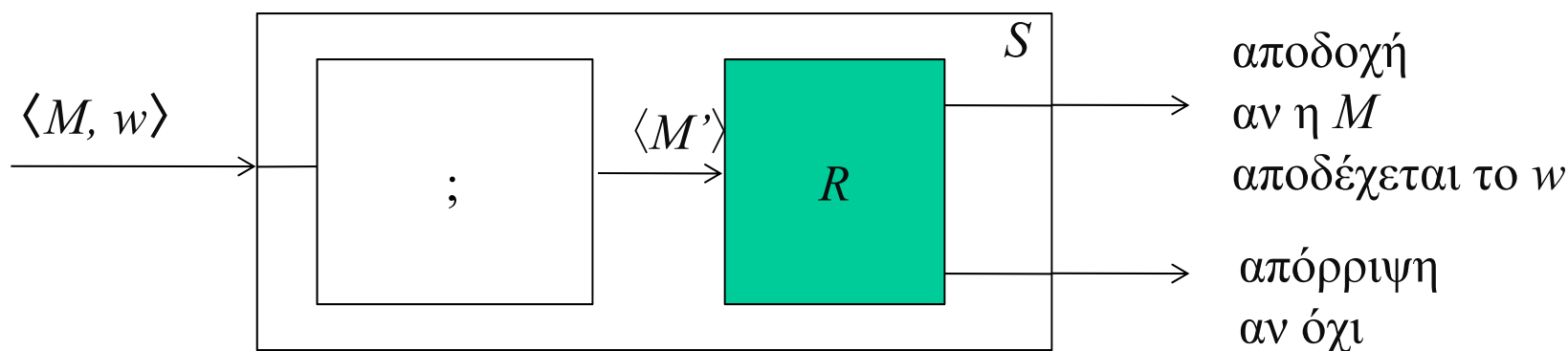
- Έστω R διαγνώστης της $AΠΟΔΟΧΗ_{ε_{TM}}$:
 - Η R με δεδομένο εισόδου μια οποιαδήποτε ΤΜ M ενημερώνει κατά πόσο η M αποδέχεται το ε .



- Τι να δώσουμε ως είσοδο στο R για να διαγνώσουμε τη γλώσσα A_{TM} ;

Παράδειγμα 1: Εντοπισμός της αναγωγής

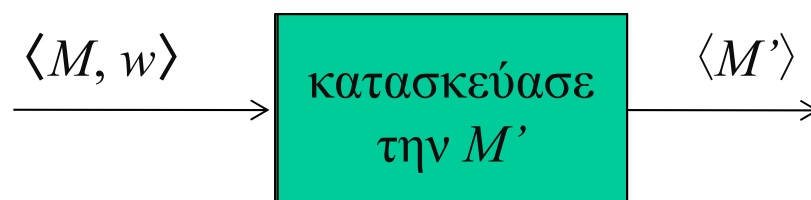
- Για να διαγνώσουμε τη γλώσσα A_{TM} η μηχανή που θα φτιάξουμε πρέπει να λειτουργεί ως εξής:



- Τι να δώσουμε ως είσοδο στο R για να διαγνώσουμε τη γλώσσα A_{TM} ;
- Θα πρέπει η M' να αποδέχεται το ϵ αν και μόνο αν η M αποδέχεται το w .

Παράδειγμα 1: Υλοποίηση της αναγωγής

- Επομένως η βοηθητική μας ΤΜ πρέπει για οποιαδήποτε είσοδο $\langle M, w \rangle$
 - να κατασκευάσει μια καινούρια μηχανή M' τέτοια ώστε η M' να αποδέχεται την w αν και μόνο αν η M αποδέχεται την w .



- Θα φτιάξουμε την M' έτσι ώστε σε κάθε δεδομένο της να τρέχει για w :

$M' =$ 'Για είσοδο z ,
Τρέξε τη M στο w
Αν η M αποδέχεται το w ,
τότε αποδέξου.
Διαφορετικά, *απόρριψε*'

Παράδειγμα 1: Υλοποίηση της αναγωγής

$M' =$ ‘Για είσοδο z ,
Τρέξε τη M στο w
Αν η M αποδέχεται το w ,
τότε αποδέξου.
Διαφορετικά, *απόρριψε*’

- Τι θα κάνει η R με είσοδο την M' ;
 - Εξ' ορισμού, θα αποδεχτεί αν η M' αποδέχεται την ε , διαφορετικά θα απορρίψει.
- Πότε η M' αποδέχεται την ε ;
 - Η M' αποδέχεται την ε εφόσον η M αποδέχεται την w .
- Επομένως, για είσοδο M' η R θα
 - Αποδεχτεί αν η M' αποδέχεται το ε , που θα συμβεί αν η M αποδέχεται το w .
 - Απορρίψει αν η M' δεν αποδέχεται το ε , που θα συμβεί αν η M δεν αποδέχεται το w .

Παράδειγμα 1: Η απόδειξη

$$ΑΠΟΔΟΧΗ_{ε_{TM}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία αποδέχεται το } \varepsilon \}$$

$$A_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη } w \}$$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα $ΑΠΟΔΟΧΗ_{ε_{TM}}$ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Τότε:

$S =$ ‘Με είσοδο $\langle M, w \rangle$ όπου M μια TM και w μια λέξη

Κατασκεύασε τη TM M' :

$M' =$ Με είσοδο z ,
Τρέξε τη M με είσοδο w

Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$ και απάντησε με το αποτέλεσμα της.’

Τότε η S αποδέχεται το $\langle M, w \rangle$ αν και μόνο αν η M αποδέχεται το ε

Επομένως η S διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} . Αντίφαση!

Παράδειγμα 2

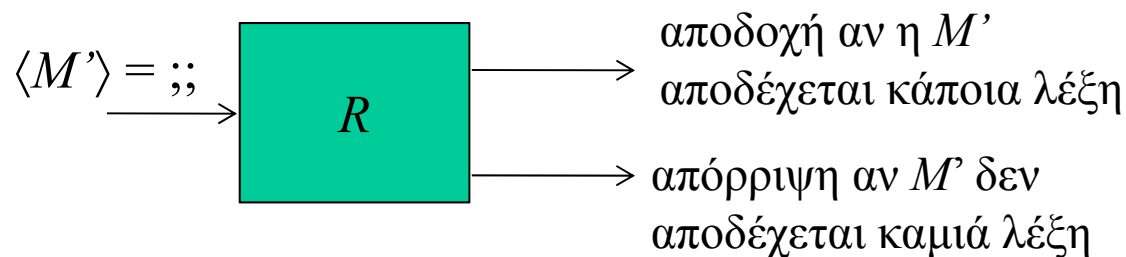
$\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία αποδέχεται κάποια λέξη}\}$

Η γλώσσα είναι διαγνώσιμη η  μη διαγνώσιμη ;;

- Βήμα 1: Εντοπισμός αναγωγής
 - Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η M αποδέχεται κάποια λέξη, θα χρειαστεί να προσομοιώσουμε τη λειτουργία της M .
 - Είναι όμως δυνατό στην πορεία να εγκλωβιστούμε!
- Βήμα 2: Αποδεικνύουμε με τη Μέθοδο της Αναγωγής.

Παράδειγμα 2 – Εντοπισμός της αναγωγής

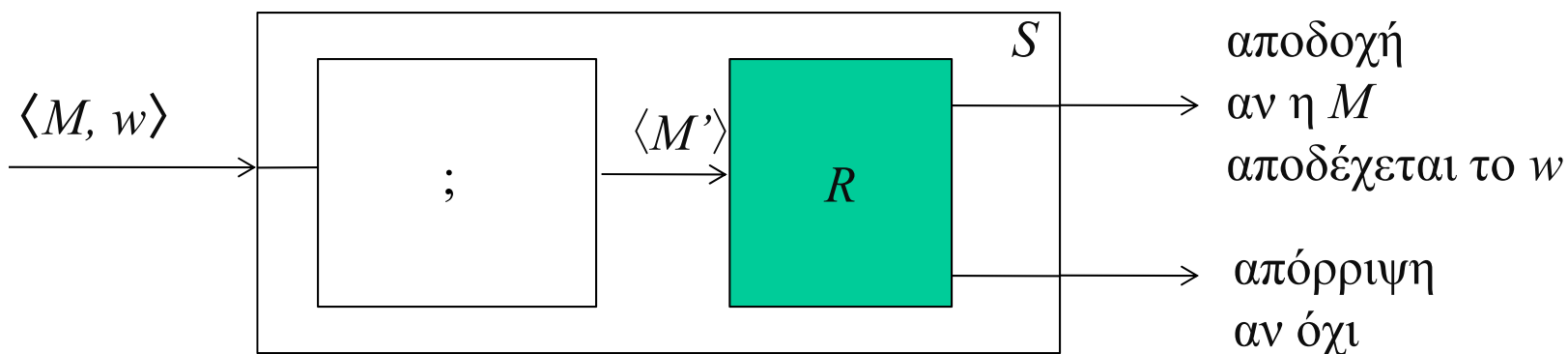
- Έστω R διαγνώστης της $\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}}$:
 - Η R με δεδομένο εισόδου μια οποιαδήποτε ΤΜ M ενημερώνει κατά πόσο η M αποδέχεται κάποια λέξη



- Τι να δώσουμε ως είσοδο στο R για να διαγνώσουμε τη γλώσσα A_{TM} ;

Παράδειγμα 2: Εντοπισμός της αναγωγής

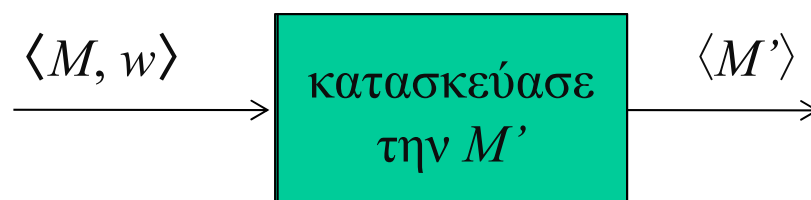
- Για να διαγνώσουμε τη γλώσσα A_{TM} η μηχανή που θα φτιάξουμε πρέπει να λειτουργεί ως εξής:



- Τι να δώσουμε ως είσοδο στο R για να διαγνώσουμε τη γλώσσα A_{TM} ;
- Θα πρέπει η M' να αποδέχεται κάποια λέξη αν και μόνο αν η M αποδέχεται το w .

Παράδειγμα 2: Υλοποίηση της αναγωγής

- Επομένως η βοηθητική μας ΤΜ πρέπει για οποιαδήποτε είσοδο $\langle M, w \rangle$
 - να κατασκευάσει μια καινούρια μηχανή M' τέτοια ώστε η M' να αποδέχεται κάποια λέξη αν και μόνο αν η M αποδέχεται το w .



- Θα φτιάξουμε την M' έτσι ώστε σε κάθε δεδομένο της να τρέχει για w :

$M' =$ 'Για είσοδο z ,
Τρέξε τη M στο w
Αν η M αποδέχεται το w ,
τότε αποδέξου.
Διαφορετικά, *απόρριψε*'

- Επομένως, η R θα διαγνώσει κατά πόσο η M αποδέχεται το w !

Παράδειγμα 2: Η απόδειξη

$\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία αποδέχεται κάποια λέξη} \}$

$A_{\text{TM}} = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη } w \}$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα $\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}}$ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Τότε:

$S =$ ‘Με είσοδο $\langle M, w \rangle$ όπου M μια TM και w μια λέξη

Κατασκεύασε τη TM M' :

$M' =$ Με είσοδο z ,
Τρέξε τη M με είσοδο w

Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$ και απάντησε με το αποτέλεσμα της.’

Τότε η S αποδέχεται το $\langle M, w \rangle$ αν και μόνο αν η M' αποδέχεται κάποια λέξη.

Επομένως η S διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} . Αντίφαση!

Παράδειγμα 3

$\text{KENOTHTA}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία δεν αποδέχεται καμία είσοδο}\}$

Η γλώσσα είναι διαγνώσιμη η  μη διαγνώσιμη ;;

- Βήμα 1: Αναγωγή;
 - Η γλώσσα αυτή αποτελεί το συμπλήρωμα της γλώσσας $\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}}$
- Βήμα 2: Αποδεικνύουμε με τη Μέθοδο της Αναγωγής

Παράδειγμα 3: Η απόδειξη

$\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{TM}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία δεν αποδέχεται καμιά είσοδο} \}$

$\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}} = \{ \langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία αποδέχεται κάποια λέξη} \}$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα $\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{TM}}$ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Τότε:

$S = \text{'Με είσοδο } \langle M \rangle \text{ όπου } M \text{ μια TM}$

Τρέξε την R με είσοδο $\langle M \rangle$.

Αν η R αποδέχεται, τότε απόρριψε

Διαφορετικά, αποδέξου.'

Επομένως η S διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\text{ΚΑΠΟΙΑ}_{\text{TM}}$. Αντίφαση!

Παράδειγμα 4

$$\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid \text{οι } M_1, M_2 \text{ είναι δύο TM τ.ω. } L(M_1) = L(M_2) \}$$

Η γλώσσα είναι διαγνώσιμη ή  μη διαγνώσιμη ;;

- Βήμα 1: Αναγωγή;
 - Αν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο τυχούσες γλώσσες μπορούμε να συγκρίνουμε και μια γλώσσα με την κενή γλώσσα.
 - Αναγωγή προς $\text{KENOTHTA}_{\text{TM}}$
- Βήμα 2: Αποδεικνύουμε με τη Μέθοδο της Αναγωγής

Παράδειγμα 4: Η απόδειξη

$\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid \text{οι } M_1, M_2 \text{ είναι δύο TM τ.ω. } L(M_1) = L(M_2)\}$

$\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία δεν αποδέχεται καμιά είσοδο}\}$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα $\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}}$ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Τότε:

$S =$ ‘Με είσοδο M όπου M μια TM
Κατασκεύασε τη TM M' :

$M' =$ Με είσοδο z ,
απόρριψε

Τρέξε την R με είσοδο $\langle M, M' \rangle$ και απάντησε με το
αποτέλεσμά της.’

Τότε η S αποδέχεται τη M αν και μόνο αν η M είναι ισοδύναμη με μια μηχανή που παράγει την κενή γλώσσα.

Επομένως η S διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{TM}}$. Αντίφαση!

Απεικονιστικές Αναγωγές

- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε μαθηματικά ότι ένα πρόβλημα A ανάγεται σε ένα άλλο πρόβλημα B?
 - Υπάρχει μια *υπολογίσιμη* συνάρτηση που μετατρέπει τα στιγμιότυπα του A σε στιγμιότυπα του B
- Αν έχουμε μια τέτοια συνάρτηση μετατροπής, τότε μπορούμε να επιλύσουμε το A χρησιμοποιώντας κάποιον αλγόριθμο που επιλύει το B.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ λέγεται *υπολογίσιμη* αν υπάρχει TM που, για κάθε είσοδο w , τερματίζει έχοντας στην ταινία της μόνο τη λέξη $f(w)$.

Παραδείγματα υπολογίσιμων συναρτήσεων

- Αριθμητικές πράξεις πάνω στους δυαδικούς αριθμούς
- Αριθμητικές πράξεις πάνω στους ακεραίους
- Η συνάρτηση που, με δεδομένο εισόδου μια TM επιστρέφει μια TM η οποία δεν προσπαθεί ποτέ να μετακινήσει την κεφαλή της ταινίας της πέρα από το αριστερότερο άκρο της ταινίας.

Τυπικός Ορισμός της Απεικονιστικής Αναγωγιμότητας

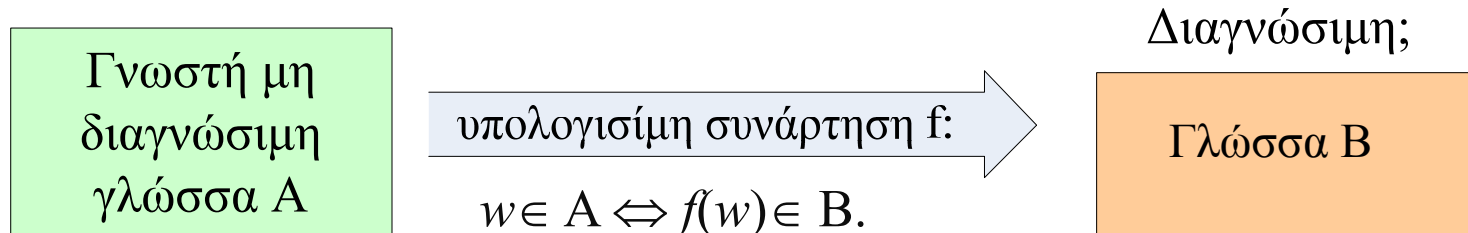
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια γλώσσα A είναι *απεικονιστικά αναγώγιμη* στη γλώσσα B , $A \leq_m B$, αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, τέτοια ώστε, για κάθε w ,

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

Η συνάρτηση f είναι η *αναγωγή* της A στη B .

- Χρήση: Για να δείξουμε ότι η B δεν είναι διαγνώσιμη:
 - Προσδιορίζω μια γλώσσα A που είναι γνωστό ότι είναι μη διαγνώσιμη
 - Εντοπίζω αναγωγή της A στη B .



Χρήση Αναγωγών

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν $A \leq_m B$ και η B είναι διαγνώσιμη τότε και η A είναι διαγνώσιμη.

- Απόδειξη: Υποθέστε ότι M διαγνώστης της B και f μια αναγωγή από το A στο B . Κατασκευάζουμε την πιο κάτω ΤΜ

$N =$ ‘ Για είσοδο w :

1. Υπολογίζουμε τη λέξη $f(w)$.
2. Εκτελούμε την M για είσοδο $f(w)$ και επιστρέφουμε ως έξοδο την έξοδο της M . ’

- **Ορθότητα:** Αφού $w \in A$ αν και μόνο αν $f(w) \in B$, τότε η N θα αποδεχτεί την $f(w)$ αν και μόνο αν $w \in A$.
- **Τερματισμός:** Αφού η M τερματίζει, τότε και η N θα τερματίσει.
- **Συμπέρασμα:** Η N είναι ένας διαγνώστης της A .

Αναγωγές και Μη Διαγνωσιμότητα

- Από το Θεώρημα 1, προκύπτει το πιο κάτω πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Αν $A \leq_m B$ και η A είναι μη διαγνώσιμη τότε και η B είναι μη διαγνώσιμη.

- Αυτό το πόρισμα συλλαμβάνει τη Μέθοδο της Αναγωγής για απόδειξη της μη διαγνωσιμότητας μιας γλώσσας.

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι $A_{TM} \leq_m \text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{TM}$

δηλ., η A_{TM} είναι απεικονιστικά αναγώγιμη στην ΠΕΡΑΤΩΣΗ_{TM} .

- Από τον ορισμό, πρέπει να εντοπίσουμε υπολογίσιμη συνάρτηση f που για κάθε είσοδο $\langle M, w \rangle$ να επιστρέφει ως έξοδο κάποιο $\langle M', w' \rangle$ τ.ω.
 - $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$ αν και μόνο αν $\langle M', w' \rangle \in \text{ΠΕΡΑΤΩΣΗ}_{TM}$

$F =$ ‘Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M μια TM και w μια λέξη:

1. Κατασκευάζουμε την εξής μηχανή
 $M' =$ ‘Για είσοδο x :
 1. Εκτελούμε την M επί της x
 2. Αν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε.
 3. Αν η M απορρίπτει, εγκλωβίζομαστε.’
2. Επιστρέφουμε τη λέξη $\langle M', w \rangle$. ’

Αναγνωρισιμότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν $A \leq_m B$ και η B είναι αναγνωρίσιμη τότε και η A είναι αναγνωρίσιμη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Αν $A \leq_m B$ και η A είναι μη αναγνωρίσιμη τότε και η B είναι μη αναγνωρίσιμη.

Αποδείξεις Μη Αναγνωρισιμότητας

- Πως μπορούμε να δείξουμε ότι μια γλώσσα A είναι μη αναγνωρίσιμη;
 - Από το Πόρισμα 2, μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει κάποια γνωστή μη αναγνωρίσιμη γλώσσα B τέτοια ώστε $B \leq_m A$.
- Ένα γνωστό μη αναγνωρίσιμο πρόβλημα είναι το $\overline{A_{TM}}$ (Διαφάνεια 8-55).
 - Επομένως για να δείξουμε ότι κάποια γλώσσα A είναι μη αναγνωρίσιμη μπορούμε να δείξουμε ότι $\overline{A_{TM}} \leq_m A$.
- Γενικά παρατηρούμε ότι:
 - Αν υπάρχει αναγωγή από την B στη A , τότε υπάρχει αναγωγή από την $\overline{B}$ στη $\overline{A}$.
- Επομένως, αντί του $\overline{A_{TM}} \leq_m B$ η μη αναγνωρισιμότητα της B μπορεί να δειχθεί ως: $A_{TM} \leq_m \overline{B}$.

Παράδειγμα Μη Αναγνωρισιμότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Η γλώσσα $\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}}$ δεν είναι ούτε αναγνωρίσιμη ούτε συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

- **Βήμα 1:** Θα δείξουμε την μη αναγνωρισιμότητα της $\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}}$ με την αναγωγή

$$A_{\text{TM}} \leq_m \overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}}}$$

- **Βήμα 2:** Θα δείξουμε την μη αναγνωρισιμότητα της $\overline{\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}}}$ με την αναγωγή

$$A_{\text{TM}} \leq_m \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{TM}}$$

Βήμα 1

- Η ανάγουσα συνάρτηση f για την αναγωγή $A_{TM} \leq_m \overline{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}$ υπολογίζεται ως ακολούθως.

$F =$ ‘Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M μια TM και w μια λέξη:

1. Κατασκευάζουμε τις παρακάτω μηχανές.

$M_1 =$ ‘Για κάθε είσοδο:

1. Απορρίπτουμε.’

$M_2 =$ ‘Για κάθε είσοδο:

1. Εκτελούμε την M επί της w .
2. Αν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε.’

2. Επιστρέφουμε τη λέξη $\langle M_1, M_2 \rangle$.’

- Αν η M αποδέχεται την w τότε η M_2 αποδέχεται όλες τις εισόδους και άρα οι $\langle M_1, M_2 \rangle$ δεν είναι ισοδύναμες.
- Από την άλλη αν η M δεν αποδέχεται τότε η M_2 δεν αποδέχεται καμιά είσοδο και άρα οι $\langle M_1, M_2 \rangle$ είναι ισοδύναμες.

Βήμα 2

- Θέλουμε να δείξουμε την απεικονιστική αναγωγή

$$A_{TM} \leq_m \text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{TM}$$

- Η ανάγουσα συνάρτηση g υπολογίζεται ως ακολούθως.

$G =$ ‘Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M μια TM και w μια λέξη:

1. Κατασκευάζουμε τις παρακάτω μηχανές.

$M_1 =$ ‘Για κάθε είσοδο:

1. Αποδεχόμαστε. ’

$M_2 =$ ‘Για κάθε είσοδο:

1. Εκτελούμε την M επί της w .
2. Αν η M αποδέχεται, αποδεχόμαστε. ‘

2. Επιστρέφουμε τη λέξη $\langle M_1, M_2 \rangle$. ‘

- Προφανώς: οι M_1, M_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν η M αποδέχεται τη w .