
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Διαγνωσιμότητα

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Διαγνώσιμες Γλώσσες (4.1)

- *Επιλύσιμα Προβλήματα σχετικά με Κανονικές Γλώσσες*
- *Επιλύσιμα Προβλήματα σχετικά με Ασυμφραστικές Γλώσσες*

Το Πρόβλημα του Τερματισμού (4.2)

Διαγνωσιμότητα (Decidability)

- Διαγνώσιμα προβλήματα (decidable problems)
 - Τα προβλήματα που **λύνονται αλγοριθμικά**
- Που βρίσκονται τα όρια της αλγοριθμικής επιλυσιμότητας;
- Γιατί μελετούμε την ανεπιλυτότητα;
 - Για να μπορούμε να γνωρίζουμε αν είναι εφικτή μια αλγοριθμική λύση για κάποιο πρόβλημα
 - Για να γνωρίσουμε τις δυνατότητες και αδυναμίες των υπολογιστών
 - Για να αποκτήσουμε μια σφαιρική άποψη της έννοιας του υπολογισμού

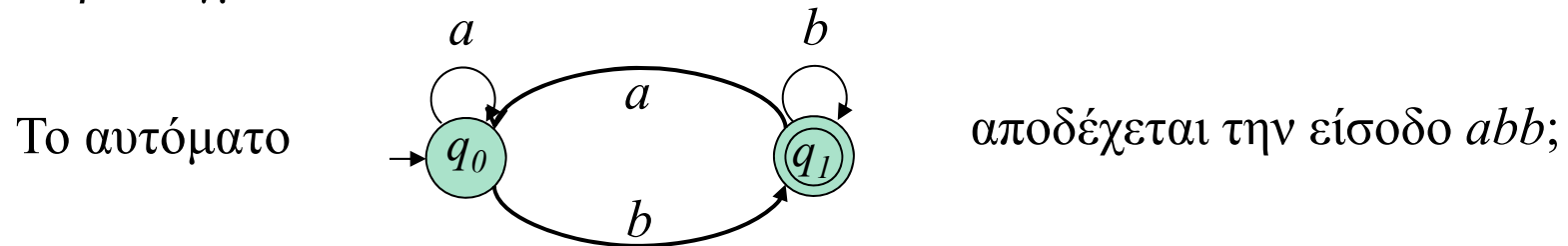
Προβλήματα σχετικά με Κανονικές Γλώσσες

- Υπολογιστικά προβλήματα που αφορούν πεπερασμένα αυτόματα.
 - *Το πρόβλημα της αποδοχής*
 - Έλεγχος κατά πόσο κάποιο αυτόματο αποδέχεται μια λέξη
 - *Το πρόβλημα της κενότητας*
 - Έλεγχος κατά πόσο η γλώσσα που αναγνωρίζει ένα αυτόματο είναι κενή
 - *Το πρόβλημα της ισοδυναμίας*
 - Έλεγχος κατά πόσο δύο αυτόματα αναγνωρίζουν τις ίδιες γλώσσες
- Θα αναπαραστήσουμε τα προβλήματα ως γλώσσες.

Το Πρόβλημα της Αποδοχής σε DFA

- Πρόβλημα: Να καταστρώσουμε ένα αλγόριθμο ο οποίος, με δεδομένα εισόδου ένα DFA B και μια λέξη w να αποφασίζει κατά πόσο το B αποδέχεται τη w ;

- Παράδειγμα:



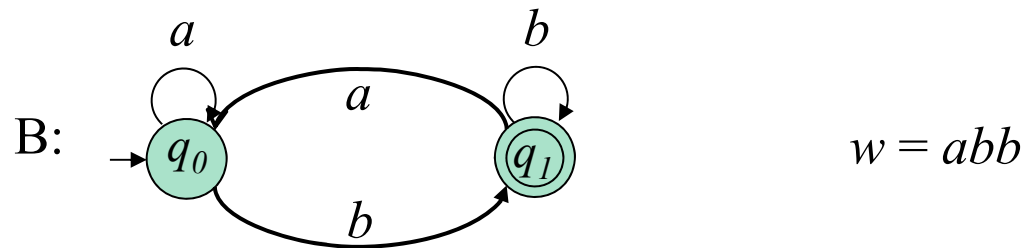
- Το ερώτημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί μέσω μιας γλώσσας:

$$A_{\text{DFA}} = \{\langle B, w \rangle : \text{το } B \text{ είναι ένα DFA που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

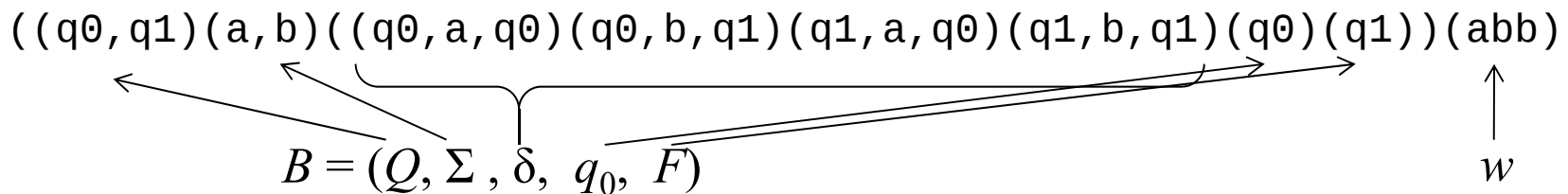
- Είναι η γλώσσα A_{DFA} διαγνώσιμη;

Το Πρόβλημα της Αποδοχής σε DFA

- Το ερώτημα συνίσταται στην κατασκευή μιας TM η οποία με δεδομένο εισόδου ένα αυτόματο B και μια λέξη w να αποδέχεται αν και μόνο αν το B αποδέχεται τη w .
- Επιστρέφοντας στο παράδειγμα...



- Αναζητούμε TM η οποία, με δεδομένο εισόδου



θα οδηγήσει σε αποδοχή (αφού το B αποδέχεται τη w).

Το Πρόβλημα της Αποδοχής σε DFA

$$A_{\text{DFA}} = \{\langle B, w \rangle : \text{το } B \text{ είναι ένα DFA που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

Ψευδοκώδικας:

Για είσοδο $\langle B, w \rangle$,
όπου $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

Θέσε $q := q_0$

Για $i := 1$ μέχρι $\text{size}(w)$:

$q := \delta(q, w_i)$

Αν $q \in F$ αποδεχόμαστε,
διαφορετικά απορρίπτουμε

Περιγραφή TM:

$M =$ ‘Για είσοδο $\langle B, w \rangle$,
όπου B ένα DFA, και w μια λέξη

Προσομοιώνουμε το B για είσοδο w

Αν η προσομοίωση καταλήξει σε
κατάσταση αποδοχής, αποδεχόμαστε,
διαφορετικά απορρίπτουμε.

Το Πρόβλημα της Αποδοχής σε DFA

$$A_{\text{DFA}} = \{\langle B, w \rangle : \text{το } B \text{ είναι ένα DFA που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

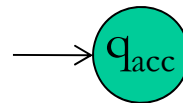
Λεπτομέρειες της MT:

1. Κατ'αρχή θα πρέπει να ελέγξουμε ότι η είσοδος έχει την ορθή μορφή.
2. Προσομοίωση:

Τρέχουσα
κατάσταση
του B

Τρέχον
σύμβολο λέξης

$((\dot{q}_0, \dot{q}_1)(a, b)(\underline{(q_0, a, q_0)}(\underline{q_0, b, q_1})(q_1, a, q_0)(\underline{q_1, b, q_1})(q_0)(\underline{q_1}))(\dot{a}\dot{b}\dot{b}))$



- **Συμπέρασμα:** Η γλώσσα A_{DFA} είναι διαγνώσιμη.

Μηχανή Turing για ΑΠΟΔΟΧΗ_{NFA}

$$A_{\text{NFA}} = \{\langle B, w \rangle : \text{το } B \text{ είναι ένα NFA που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

- N = ‘ Για είσοδο $\langle B, w \rangle$, όπου B ένα NFA και w μια λέξη:
 1. **Μετατρέπουμε** το B σε ένα ισοδύναμο DFA C .
 2. **Εκτελούμε** την TM M (Διαφάνεια 8-6) πάνω στη λέξη $\langle C, w \rangle$
 3. Αν η M αποδέχεται, **αποδεχόμαστε**, αλλιώς **απορρίπτουμε**.’
- **Συμπέρασμα**: Η γλώσσα A_{NFA} είναι διαγνώσιμη (αναδρομική)
- Χρησιμοποιεί την M ως υποπρόγραμμα:
 - Η συνάρτηση μεταβάσεων της M ενσωματώνεται σε εκείνη της N

Παραγωγή Λέξης από Κανονικές Εκφράσεις

$$\Pi_{\text{REX}} = \{\langle R, w \rangle : \text{η } R \text{ είναι μια κανονική έκφραση που παράγει τη λέξη } w\}$$

- P = ‘ Για είσοδο $\langle R, w \rangle$, όπου R κανονική έκφραση και w μια λέξη:
 1. Μετατρέπουμε την R σε ένα ισοδύναμο NFA B .
 2. Εκτελούμε την TM N (Διαφάνεια 8-8) πάνω στη λέξη $\langle B, w \rangle$
 3. Αν η N αποδέχεται, *αποδεχόμαστε*, αλλιώς *απορρίπτουμε*.’
- Συμπέρασμα: Η γλώσσα Π_{REX} είναι διαγνώσιμη (αναδρομική)

Το πρόβλημα της Κενότητας σε DFA

$$\text{KENOTHTA}_{\text{DFA}} = \{\langle B \rangle \mid \text{το } B \text{ είναι ένα DFA και } L(B) = \emptyset\}$$

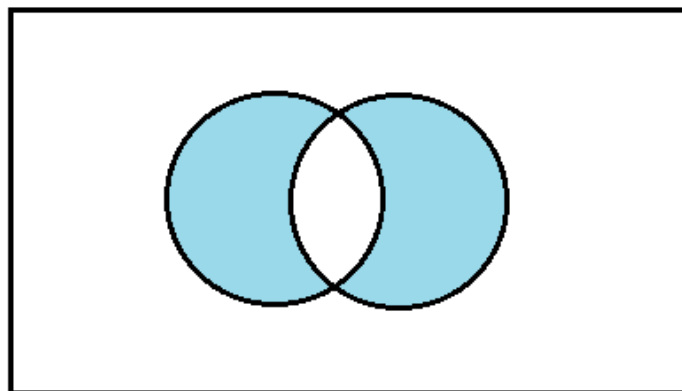
- Να ελεγχθεί αν η γλώσσα του αυτόματου είναι η κενή
- Πότε ένα DFA αποδέχεται κάποια από τις εισόδους του;
 - Όταν από την εναρκτήρια μπορούμε να μεταβούμε σε κατάσταση αποδοχής ακολουθώντας τις μεταβάσεις του
- $T =$ ‘ Για είσοδο $\langle B \rangle$, όπου B ένα DFA:
 1. **Σημαδεύουμε** την εναρκτήρια κατάσταση του B .
 2. **Επαναλαμβάνουμε** μέχρις ότου να μην σημαδεύεται καμιά νέα κατάσταση:
 3. **Σημαδεύουμε** όλες τις καταστάσεις στις οποίες μπορούμε να μεταβούμε από τις ήδη σημαδεμένες.
 4. Αν καμιά κατάσταση αποδοχής δεν είναι σημαδεμένη, **αποδεχόμαστε**, αλλιώς **απορρίπτουμε**.’
- **Συμπέρασμα:** Η γλώσσα $\text{KENOTHTA}_{\text{DFA}}$ είναι διαγνώσιμη (αναδρομική)

Το Πρόβλημα της Ισοδυναμίας σε DFA

$$\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{DFA}} = \{\langle A, B \rangle \mid \text{τα } A, B \text{ είναι DFA και } L(A) = L(B)\}$$

- **Ιδέα:** Κατασκευή ενός νέου αυτόματου C που αποδέχεται μόνο τις λέξεις που γίνονται αποδεκτές είτε από το A είτε από το B αλλά όχι και από τα δύο:
 - Αν η $L(C) = \emptyset$ τότε οι A και B είναι ισοδύναμες
 - $L(C)$: η συμμετρική διαφορά

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)} \right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B) \right)$$



Μηχανή Turing για $\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{DFA}}$

- Κατασκευάζουμε το αυτόματο C χρησιμοποιώντας τις κατασκευές της κλειστότητας ως προς το συμπλήρωμα, την ένωση και την τομή
- $F =$ ‘ Για είσοδο $\langle A, B \rangle$, όπου A, B δύο DFA:
 1. Κατασκευάζουμε το DFA C .
 2. Εκτελούμε την TM T (Διαφάνεια 8-10) πάνω στο C
 3. Αν η T αποδέχεται *αποδεχόμαστε*, αλλιώς *απορρίπτουμε*.’
- **Συμπέρασμα:** Η γλώσσα $\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{DFA}}$ είναι διαγνώσιμη (αναδρομική).

Προβλήματα σχετικά με Ασυμφραστικές Γλώσσες

- Υπολογιστικά προβλήματα για ασυμφραστικές γραμματικές
 - Παραγωγή λέξης από Ασυμφραστική Γραμματική
 - Κενότητα γλώσσας Ασυμφραστικής Γραμματικής
 - Ισοδυναμία Ασυμφραστικών Γραμματικών
 - Διαγνωσιμότητα Ασυμφραστικών Γλωσσών

Το Πρόβλημα της Παραγωγής από CFG

$$\text{ΠΑΡΑΓΩΓΗ}_{\text{CFG}} = \{ \langle G, w \rangle \mid \text{το } G \text{ είναι μια CFG που παράγει την λέξη } w \}$$

- **Ιδέα 1:** Διατρέχουμε όλες τις πιθανές παραγωγές της G και ελέγχουμε αν η w είναι μια από αυτές
 - Πρόβλημα: Μπορεί να υπάρχει άπειρο πλήθος παραγωγών
 - Αν η γραμματική δεν παράγει την w ο αλγόριθμος δεν τερματίζει
 - Σε αυτή την περίπτωση η TM αναγνωρίζει αλλά δεν διαγιγνώσκει
- **Ιδέα 2:** Αν η G είναι σε **κανονική μορφή Chomsky** τότε οποιαδήποτε παραγωγή της w αποτελείται από $2n-1$ βήματα (όπου $n=|w|$).
 - Ελέγχουμε μόνο παραγωγές $2n-1$ βημάτων που είναι πεπερασμένες σε αριθμό

Υπενθύμιση: Κανονικές Μορφές Chomsky

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ασυμφραστική γραμματική G βρίσκεται σε *κανονική μορφή Chomsky* αν κάθε κανόνας της βρίσκεται σε μια από τις μορφές

$$A \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow a$$

όπου a οποιοδήποτε τερματικό σύμβολο, A οποιαδήποτε μεταβλητή, και B και C οποιεσδήποτε μεταβλητές διάφορες της εναρκτήριας S . Επιπλέον επιτρέπεται ο κανόνας $S \rightarrow \varepsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε ασυμφραστική γλώσσα παράγεται από κάποια ασυμφραστική γραμματική σε κανονική μορφή Chomsky

Μηχανή Turing για $\text{ΠΑΡΑΓΩΓΗ}_{\text{CFG}}$

- $S =$ ‘ Για είσοδο $\langle G, w \rangle$, όπου G μια CFG και w μια λέξη:
 1. **Μετατρέπουμε** τη G σε μια ισοδύναμη γραμματική σε κανονική μορφή Chomsky.
 2. **Συντάσσουμε** όλες τις παραγωγές $2n-1$ βημάτων
 3. Αν κάποια από τις παραγωγές είναι η w , **αποδεχόμαστε**, αλλιώς **απορρίπτουμε**.’
- **Συμπέρασμα:** Η γλώσσα $\text{ΠΑΡΑΓΩΓΗ}_{\text{CFG}}$ είναι διαγνώσιμη

Έλεγχος Σύνταξης Προγραμμάτων (Parsing)

- Ο έλεγχος της σύνταξης προγραμμάτων αποτελεί μια ειδική περίπτωση του προβλήματος της παραγωγής από CFG:
 - Δοθείσας της γραμματικής που περιγράφει τη σύνταξη μιας γλώσσας έλεγξε κατά πόσο ένα πρόγραμμα παράγεται από αυτή (είναι συντακτικά ορθό)
- Προφανώς ο αλγόριθμος που περιγράψαμε είναι υπερβολικά χρονοβόρος για να εφαρμοστεί στην πράξη για το συγκεκριμένο πρόβλημα
- Είναι όμως απλός στην παρουσίασή του.
- Πολυπλοκότητα χώρου και χρόνου vs απλότητα
 - Μελετώντας την επιλυσιμότητα δεν μας ενδιαφέρει η πολυπλοκότητα – είναι αρκετό να δείξουμε ότι ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί αλγοριθμικά.

Το πρόβλημα της Κενότητας σε CFG

$$\text{ΚΕΝΟΤΗΤΑ}_{\text{CFG}} = \{\langle G \rangle \mid \text{το } G \text{ είναι μια CFG και } L(G) = \emptyset\}$$

- **Ιδέα 1:** Να ελέγξουμε όλες τις πιθανές λέξεις w
 - Άπειρες λέξεις και επομένως μπορεί να μην τερματίσουμε
- **Ιδέα 2:** Πότε μια CFG παράγει μια λέξη;
 - Όταν από την εναρκτήρια μεταβλητή μπορούμε να παραγάγουμε λέξεις τερματικών συμβόλων
 - Γενικότερο πρόβλημα: Ελέγχουμε αν από κάθε μεταβλητή μπορούμε να παραγάγουμε λέξεις τερματικών συμβόλων

Μηχανή Turing για $KENOTHTA_{CFG}$

- R=‘ Για είσοδο $\langle G \rangle$, όπου G μια CFG:
 1. Σημαδεύουμε όλα τα τερματικά σύμβολα της G .
 2. Επαναλαμβάνουμε μέχρις ότου να μην μπορούμε να σημαδέψουμε άλλες μεταβλητές:
 3. Σημαδεύουμε κάθε μεταβλητή A για την οποία υπάρχει κανόνας
$$A \rightarrow U_1 \dots U_k$$
όπου τα $U_1 \dots U_k$ είναι ήδη σημαδεμένα.
 4. Αν η εναρκτήρια δεν είναι σημαδεμένη, αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’
- **Συμπέρασμα:** Η γλώσσα $KENOTHTA_{CFG}$ είναι διαγνώσιμη (αναδρομική)

Παράδειγμα

- Έστω η γραμματική

$$P \rightarrow aPb$$

$$P \rightarrow aQ$$

$$Q \rightarrow \varepsilon$$

$$Q \rightarrow aQ$$

- Βήμα 1: Σημαδεύουμε όλα τα τερματικά σύμβολα

$$P \rightarrow aP\dot{b}$$

$$P \rightarrow a\dot{Q}$$

$$\underline{Q} \rightarrow \dot{\varepsilon}$$

$$Q \rightarrow \underline{a}\dot{Q}$$

- Βήμα 2: Σημαδεύουμε τη Q

$$P \rightarrow aP\dot{b}$$

$$\underline{P} \rightarrow a\dot{Q}$$

$$\dot{Q} \rightarrow \varepsilon$$

$$\dot{Q} \rightarrow a\dot{Q}$$

- Βήμα 3: Σημαδεύουμε τη P

$$\dot{P} \rightarrow a\dot{P}\dot{b}$$

$$\dot{P} \rightarrow a\dot{Q}$$

$$\dot{Q} \rightarrow \varepsilon$$

$$\dot{Q} \rightarrow a\dot{Q}$$

Το πρόβλημα της Ισοδυναμίας σε CFG

$$\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{CFG}} = \{ \langle G, H \rangle \mid \text{τα } G, H \text{ είναι CFG και } L(A)=L(B) \}$$

- **Ιδέα:** να χρησιμοποιήσουμε παρόμοια τακτική με τον αλγόριθμο ισοδυναμίας σε κανονικές γλώσσες
 - **Πρόβλημα:** Η κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών δεν είναι κλειστή κάτω από τις πράξεις του συμπληρώματος και της τομής
- **Πραγματικότητα:** Μπορούμε να δείξουμε ότι...
- **Συμπέρασμα:** Η γλώσσα $\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ}_{\text{CFG}}$ δεν είναι διαγνώσιμη.

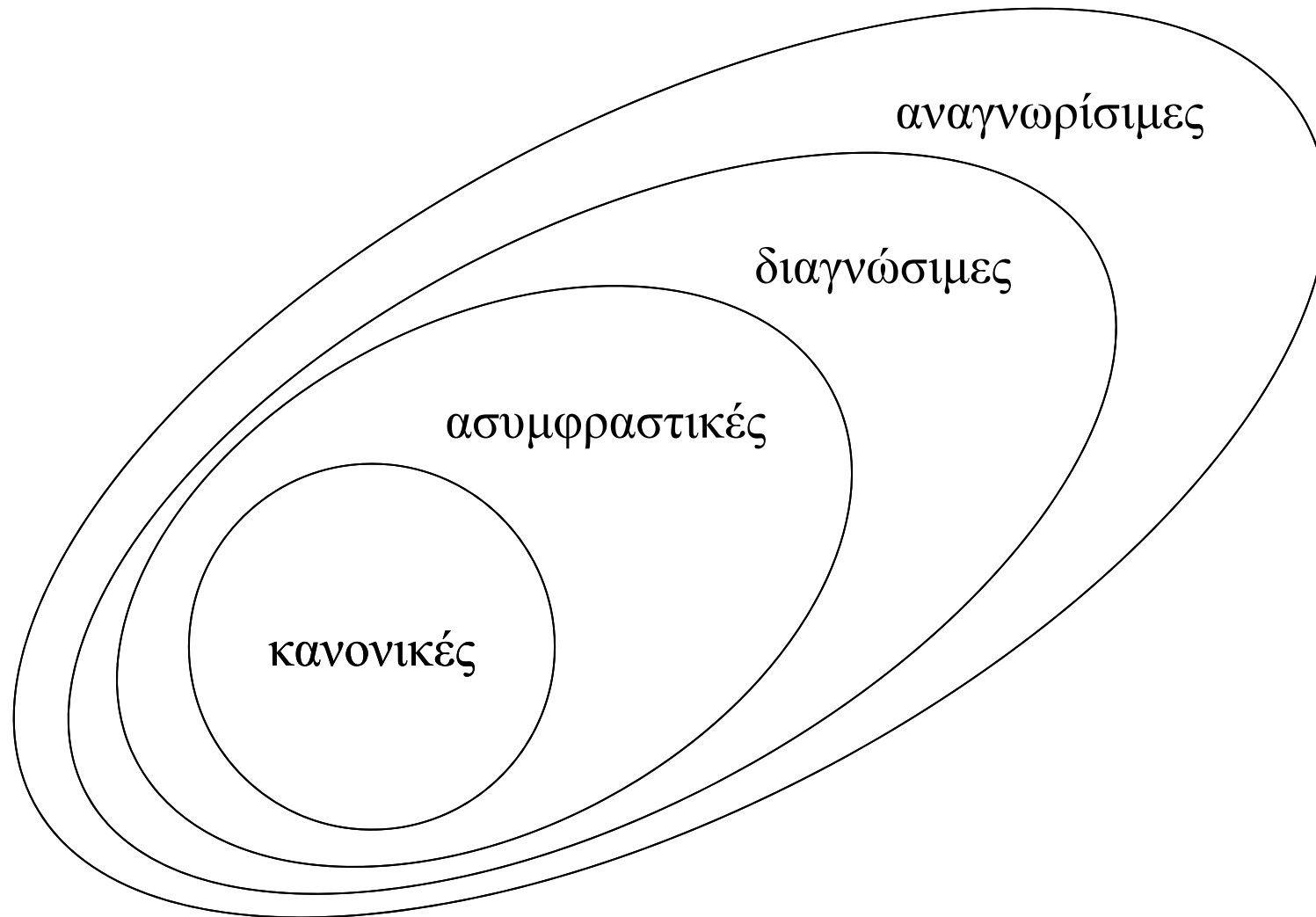
Κάθε Ασυμφραστική Γλώσσα είναι Διαγνώσιμη

- Έστω A μια ασυμφραστική γλώσσα και θέλουμε να καταστρώσουμε αλγόριθμο που να την διαγιγνώσκει
 - Να αποφασίζει κατά πόσο μια λέξη ανήκει ή όχι στην A
- Αφού A είναι ασυμφραστική τότε
 - Υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει
 - Υπάρχει ασυμφραστική γραμματική που την παράγει
- **Ιδέα 1:** Να προσομοιωθεί το αυτόματο στοίβας που αναγνωρίζει την A από μια μηχανή Turing
 - Σχετικά απλή προσομοίωση
 - Όμως: Αν κάποιοι κλάδοι του αυτομάτου γράφουν και διαβάζουν από την στοίβα επ'άπειρον τότε η TM *δεν τερματίζει* $\Rightarrow$ *δεν διαγιγνώσκει*

Κάθε Ασυμφραστική Γλώσσα είναι Διαγνώσιμη

- **Ιδέα 2:** Να διαγνώσουμε τη γλώσσα μέσω της γραμματικής που την παράγει
 - Χρήση μηχανής που διαγιγνώσκει την γλώσσα ΠΑΡΑΓΩΓΗ_{CFG}
- Έστω A η ασυμφραστική γλώσσα που θέλουμε να διαγνώσουμε και G μια ασυμφραστική γραμματική που την παράγει
- Μηχανή που διαγιγνώσκει την A
 $M_G =$ ‘ Για είσοδο w :
 1. Εκτελούμε την TM S (Διαφάνεια 8-16) με είσοδο $\langle G, w \rangle$
 2. Αν η S αποδεχθεί τότε αποδεχόμαστε, αλλιώς απορρίπτουμε.’

Σχέση Γλωσσών



Το Πρόβλημα του Τερματισμού

- Ανεπιλυτότητα: υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν μέσω των υπολογιστών
- Τι είδους προβλήματα είναι αυτά;
 - Συνηθισμένα προβλήματα από πολλές περιοχές της Πληροφορικής
- Παράδειγμα: Το πρόβλημα της επαλήθευσης λογισμικού
- Τι είδους προβλημάτων είναι ανεπίλυτα;
- Πως δείχνουμε το ανεπίλυτο τέτοιων προβλημάτων;

Αποδοχή_{TM}

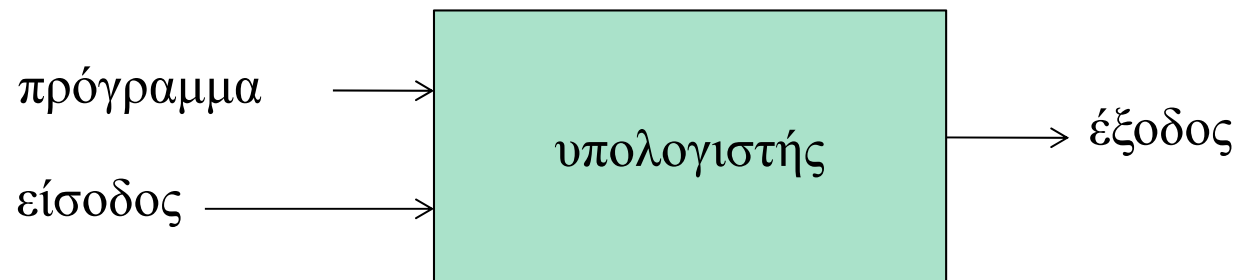
$$A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη.

- Εντούτοις η A_{TM} είναι αναγνωρίσιμη:
 - Υπάρχει TM η οποία αποδέχεται κάθε ζεύγος $\langle M, w \rangle$ που ανήκει στη γλώσσα (δηλαδή, η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w)
- Η εν λόγω μηχανή είναι η *Καθολική Μηχανή Turing* (Universal Turing Machine)
 - Μια μηχανή που μπορεί να προσομοιώσει οποιαδήποτε άλλη TM με αφετηρία την περιγραφή της
 - Έναυσμα για την ανάπτυξη υπολογιστών αποθηκευμένου προγράμματος

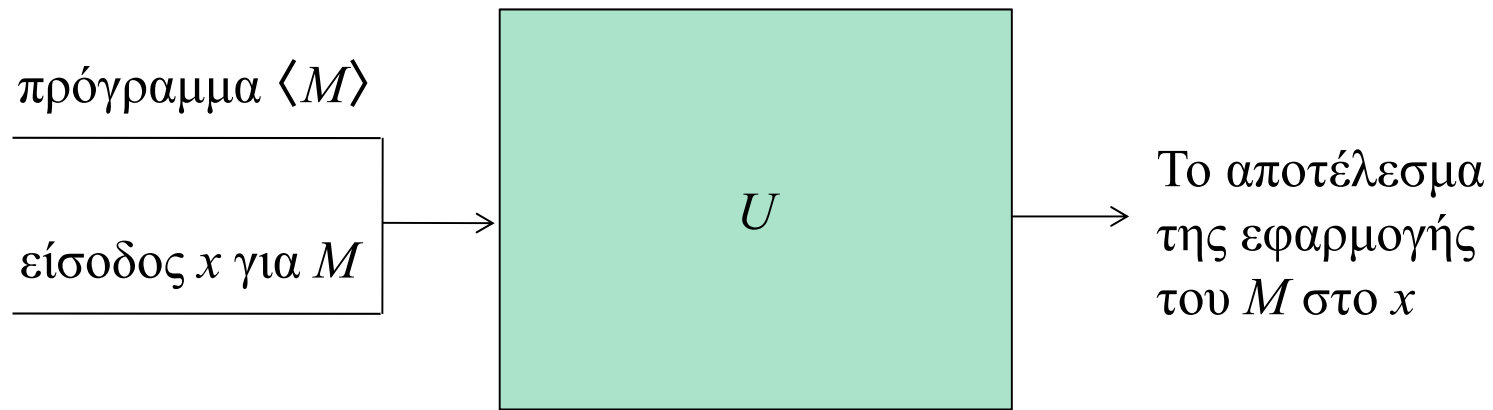
Μηχανές Turing έναντι υπολογιστών



Ένας υπολογιστής είναι μια μηχανή η οποία επεξεργάζεται την είσοδό της σύμφωνα με μια ακολουθία εντολών.

Πως μπορεί μια μηχανή Turing να πάρει ως είσοδο ένα πρόγραμμα;

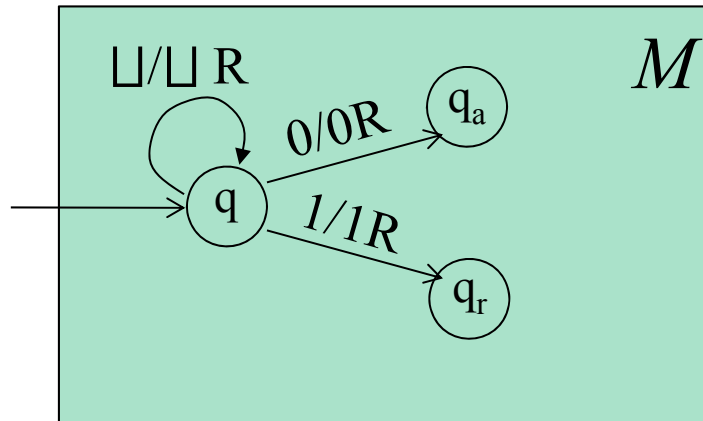
Η Καθολική Μηχανή Turing



Η Καθολική **TM** U παίρνει ως εισόδους ένα πρόγραμμα M και μια λέξη x και προσομοιώνει το M στο x .

Το πρόγραμμα M ορίζεται επίσης ως μια TM!

Μηχανές Turing ως λέξεις

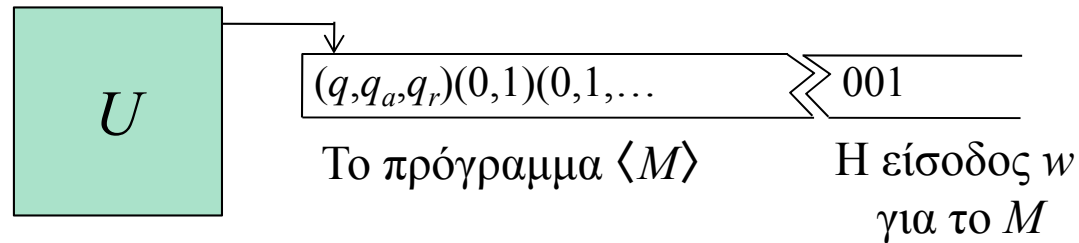


Μηχανή Turing:
 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$

- Η πιο πάνω μηχανή Turing μπορεί να αναπαρασταθεί ως την πιο κάτω λέξη

$$\begin{aligned} \langle M \rangle = & (q, q_a, q_r) \\ & (0, 1) \\ & (0, 1, \sqcup) \\ & ((q, q, \sqcup / \sqcup R) (q, q_a, 0/0R) (q, q_r, 1/1R)) \\ & (q) \\ & (q_a) \\ & (q_r) \end{aligned}$$

Η Καθολική Μηχανή Turing



$U =$ ‘Για είσοδο $\langle M, w \rangle$,

Τρέξε την M στην είσοδο w

Αν η M αποδεχθεί τη w , *αποδέξου*.

Αν η M απορρίψει τη w , *απόρριψε*.’

Αποδοχή από Καθολική TM U

$$A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid \eta \text{ } M \text{ είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

$U =$ Για είσοδο $\langle M, w \rangle$,

Τρέξε την M στην είσοδο w

M αποδέχεται τη w



U αποδέχεται το $\langle M, w \rangle$

M απορρίπτει τη w



U απορρίπτει το $\langle M, w \rangle$

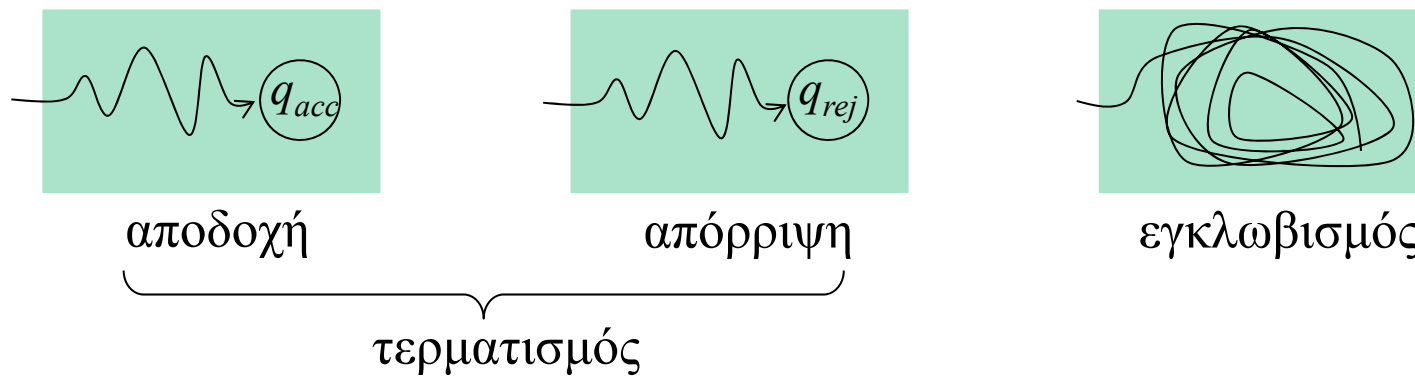
M εγκλωβίζεται στη w



U εγκλωβίζεται στο $\langle M, w \rangle$

Η TM U αναγνωρίζει αλλά δεν διαγιγνώσκει την A_{TM}

Αναγνώριση – Διάγνωση



Μια TM **αναγνωρίζει μια γλώσσα** αν για κάθε λέξη της γλώσσας οδηγείται σε αποδοχή.

Μια TM **διαγιγνώσκει μια γλώσσα** αν για κάθε λέξη της γλώσσας οδηγείται σε αποδοχή και, επιπλέον, τερματίζει σε κάθε είσοδο (δεν εγκλωβίζεται ποτέ).

Η Γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη

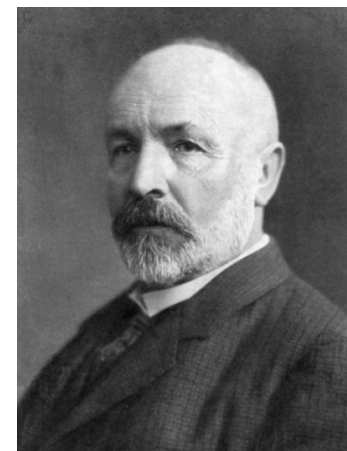
- Επομένως:
 - Η TM U δεν διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} .
 - Δεν έχει τρόπο να διαπιστώσει ότι μια TM M μπορεί να εγκλωβιστεί/να μην τερματίσει σε μια λέξη w .
 - Θα δείξουμε ότι τέτοιος τρόπος δεν υπάρχει – το πρόβλημα του τερματισμού είναι μη επιλύσιμο.

- Το Θεώρημα του Turing:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη.

- Η απόδειξη βασίζεται στην τεχνική της διαγωνιοποίησης
 - Επινοήθηκε από τον Μαθηματικό Georg Cantor, 1873
 - Προσπαθούσε να συγκρίνει τα μεγέθη 2 άπειρων συνόλων



Μέθοδος Διαγωνιοποίησης

- Πως μπορούμε να ξέρουμε αν δυο πεπερασμένα σύνολα είναι ισομεγέθη;
 - Μετρούμε τα στοιχεία τους
- Και αν είναι μη πεπερασμένα;
 - Cantor: Αν μπορούμε να συνταιριάξουμε κάθε στοιχείο του ενός με ένα στοιχείο του άλλου

Μέθοδος της Διαγωνιοποίησης – Ορισμοί

- Έστω δύο σύνολα A και B και f συνάρτηση από το A στο B :
 - Η f είναι **μονομορφική** ή ένα-προς-ένα αν κάθε ζεύγος ξεχωριστών στοιχείων του A απεικονίζεται σε δύο ξεχωριστά στοιχεία του B
$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b)$$
 - Η f είναι **επιμορφική** ή επί του B αν χρησιμοποιεί όλα τα στοιχεία του B για κάθε b υπάρχει a τέτοιο ώστε $f(a) = b$
- Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισομεγέθη** αν υπάρχει μονομορφική και επιμορφική συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ που να τα συνδέει.

Παράδειγμα 1

- Έστω τα σύνολα:
 - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ φυσικοί αριθμοί
 - $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, \dots\}$ άρτιοι αριθμοί
 - Είναι τα δύο σύνολα ισομεγέθη;
- Θεωρήστε την αντιστοιχία $f(n)=2n$ από το $\mathbb{N}$ στο $\mathcal{A}$

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
...	...

- Κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}$ αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{A}$
 - Άρα τα $\mathbb{N}$ και $\mathcal{A}$ είναι ισομεγέθη!!

Αριθμήσιμα και Υπεραριθμήσιμα Σύνολα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο λέγεται *αριθμήσιμο* αν είναι πεπερασμένο ή ισομέγεθες με το $\mathbb{N}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο λέγεται *υπεραριθμήσιμο* αν δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε ισομέγεθες με το $\mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2

- Έστω το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Θεώρημα: Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο
- Έστω ότι υπάρχει αντιστοιχία f από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$

n	$f(n)$
1	3.14159
2	55.55555
3	0.12345
...	...

- Θα κατασκευάσουμε ένα αριθμό x που δεν συνταιριάζεται με κανένα από τους αριθμούς στο $\mathbb{N}$ (δεν υπάρχει n , τέτοιο ώστε $f(n) = x$).
 - Ο x πρέπει να διαφέρει από όλους τους πραγματικούς αριθμούς που έχουν αντιστοιχία

Παράδειγμα 2 (συν.)

- Κατασκευή x : Επιλέγουμε το x μεταξύ $[0,1]$ έτσι ώστε
 - Για το n -οστό δεκαδικό ψηφίο του x επιλέγουμε ένα αριθμό διαφορετικό από το n -οστό ψηφίο του δεκαδικού που αντιστοιχεί στο n :
Το 1^ο δεκαδικό ψηφίο του x να διαφέρει από το αντίστοιχο ψηφίο του $f(1)$
Το 2^ο δεκαδικό ψηφίο του x να διαφέρει από το αντίστοιχο ψηφίο του $f(2)$

...

- Για παράδειγμα, αν η f ορίζεται όπως πιο κάτω

n	$f(n)$
1	3. <u>1</u> 4159
2	55.55 <u>5</u> 55
3	0.123 <u>4</u> 5
...	...

επιλέγουμε $x = 0.565\dots$

- Άρα ο αριθμός x δεν συμπίπτει με τον αριθμό $f(n)$ για οποιοδήποτε n και επομένως δεν αντιστοιχείται από τη συνάρτηση f .

Μη Αναγνωρίσιμες Γλώσσες

ΠΟΡΙΣΜΑ

Υπάρχουν μη αναγνωρίσιμες γλώσσες.

- Πλήθος γλωσσών: υπεραριθμήσιμο
- Πλήθος μηχανών Turing: αριθμήσιμο
- Παρατήρηση: Κάθε TM αναγνωρίζει ακριβώς μια γλώσσα
- Συμπέρασμα: Υπάρχουν γλώσσες που δεν αναγνωρίζονται από καμιά μηχανή Turing

Πρόβλημα του Τερματισμού – Απόδειξη

$$A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM που αποδέχεται τη λέξη } w\}$$

- Θεώρημα: Η γλώσσα A_{TM} δεν είναι διαγνώσιμη.
- Απόδειξη με αντίφαση:

Ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα A_{TM} είναι διαγνώσιμη.

Έστω μηχανή Turing H , η οποία διαγιγνώσκει την A_{TM} :

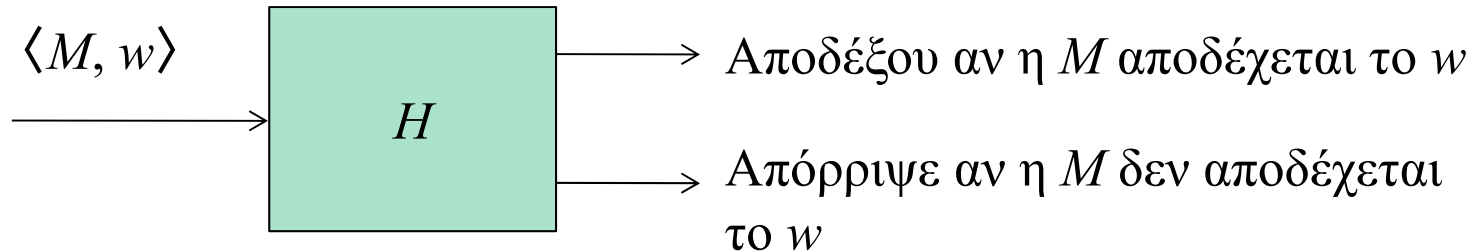
$H =$ ‘ Για είσοδο $\langle M, w \rangle$, όπου M μια TM και w μια λέξη:

 Προσομοιώνουμε την M για είσοδο w .

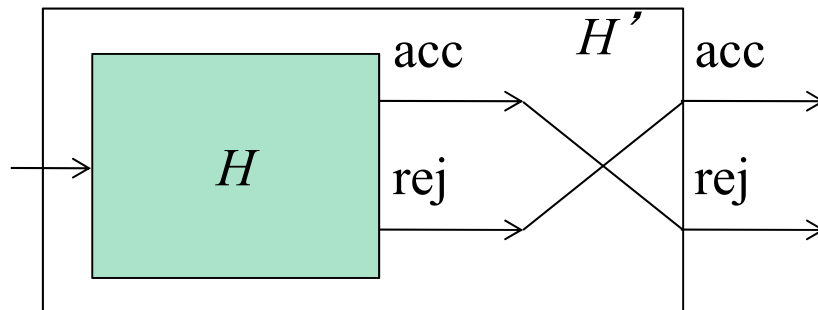
 Αν η M μεταβεί στην κατάσταση αποδοχής, αποδεχόμαστε.

 Αν η M δεν αποδέχεται, είτε επειδή έφτασε σε κατάσταση απόρριψης είτε επειδή δεν τερματίζει, απορρίπτουμε.’

Απόδειξη (συν.)

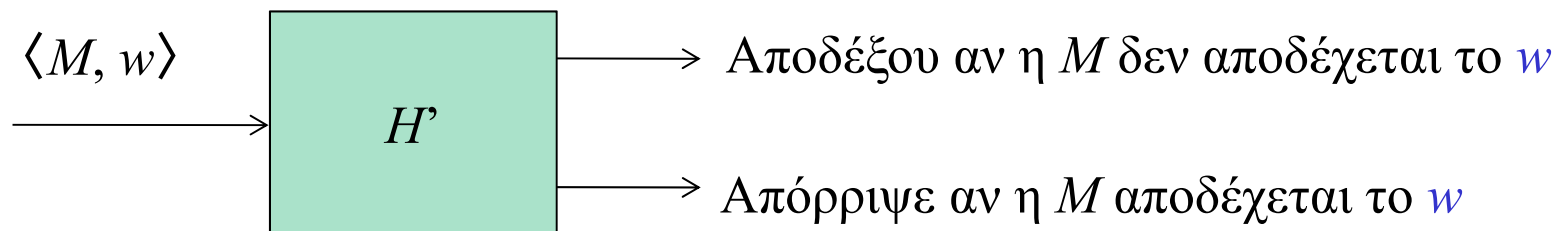


Έστω H' η TM που δίνει το αντίθετο αποτέλεσμα από αυτό της H



Απλά, ανταλλάσσουμε την κατάσταση αποδοχής με την κατάσταση απόρριψης.

Απόδειξη (συν.)



Έστω D η ακόλουθη TM:

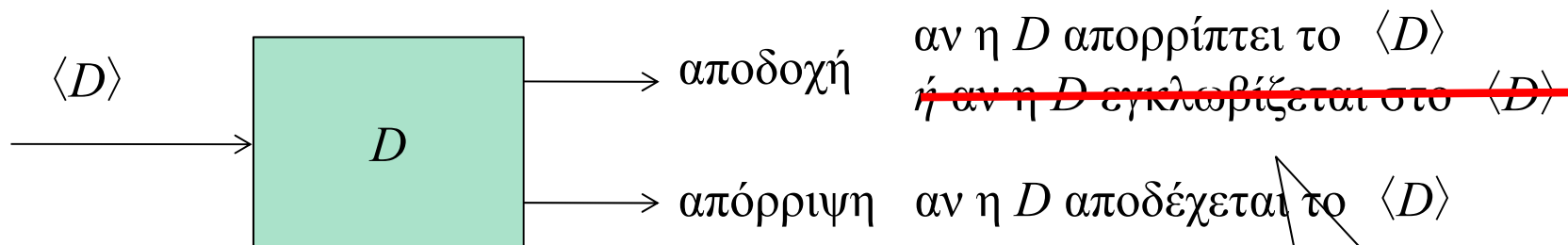
$D =$ ' Για είσοδο $\langle M \rangle$, όπου M μια TM :

Εκτελούμε την H' για είσοδο $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.

Αν η H' μεταβεί στην κατάσταση αποδοχής, αποδεχόμαστε.

Αν η H' μεταβεί στην κατάσταση απόρριψης , απορρίπτουμε.'

Απόδειξη (συν.)



Τι γίνεται αν $M = D$?

Αν η D αποδέχεται το $\langle D \rangle$
τότε η D απορρίπτει το $\langle D \rangle$

Αν η D απορρίπτει το $\langle D \rangle$
τότε η D αποδέχεται το $\langle D \rangle$

η H δεν εγκλωβίζεται
επομένως
ούτε η D εγκλωβίζεται

Αντίφαση !

Συμπέρασμα απόδειξης

- Απόδειξη με αντίφαση
 - Υποθέσαμε ότι η A_{TM} είναι διαγνώσιμη
 - Στη συνέχεια κατασκευάσαμε τις μηχανές Turing H, H', D
 - Όμως η D είναι αδύνατον να υπάρχει! Και επομένως το ίδιο ισχύει για τις H και H' .
- Συμπέρασμα:

Η γλώσσα A_{TM} είναι μη διαγνώσιμη.

Διαγωνιοποίηση στην απόδειξη

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη συμπεριφορά όλων των TM για λέξεις στο $\{0,1\}^*$ μέσω ενός πίνακα (οι τιμές που αναφέρονται είναι ενδεικτικές).

		Πιθανές είσοδοι w				
		ε	0	1	00	...
Όλες οι δυνατές Μηχανές Turing	M_1	acc	rej	rej	acc	
	M_2	rej	acc	loop	rej	...
	M_3	rej	loop	rej	rej	
	$\vdots$			$\vdots$		

Μη πεπερασμένος πίνακας για κάθε ζεύγος (M, w)

Διαγωνιοποίηση στην απόδειξη (συν.)

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...
M_1	acc	loop	rej	acc	
M_2	rej	acc	rej	acc	...
M_3	loop	rej	loop	rej	
$\vdots$			$\vdots$		

Ας μελετήσουμε τη συμπεριφορά όλων των TM των οποίων η είσοδος w περιγράφει μια TM.

Διαγωνιοποίηση στην απόδειξη (συν.)

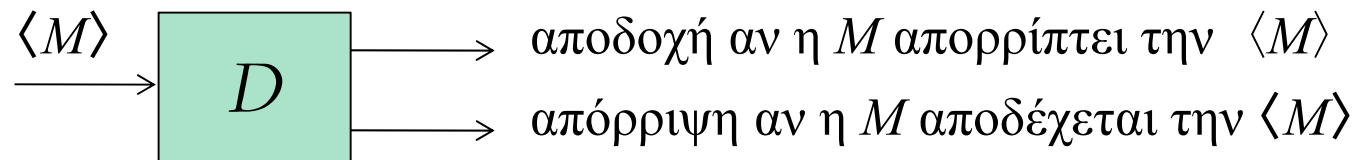
	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\dots$
M_1	acc	loop	rej	acc	
M_2	rej	acc	rej	acc	$\dots$
$\vdots$			$\vdots$		
D	rej	rej	acc	rej	
$\vdots$			$\vdots$		

Αν η A_{TM} είναι διαγνώσιμη, τότε η TM D θα πρέπει να αναφέρεται στον πίνακα.

Διαγωνιοποίηση στην απόδειξη (συν.)

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	...
M_1	acc	loop	rej	acc	
M_2	rej	acc	rej	acc	...
$\vdots$			$\vdots$		
D	rej	rej	acc	rej	

Σε κάθε στήλη, η D πρέπει να έχει αντίθετη τιμή από αυτή που βρίσκεται στην διαγώνιο της ίδιας στήλης.



Διαγωνιοποίηση στην απόδειξη (συν.)

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle \dots$	$\langle D \rangle$
M_1	acc	loop	rej	acc	loop
M_2	rej	acc	rej	acc	...
$\vdots$					
D	rej	rej	acc	rej	...

Diagram illustrating the diagonalization process. A blue shaded region covers the diagonal elements (acc, acc, acc, acc, ...). Red arrows point from the diagonal elements to the corresponding elements in the row D , indicating the construction of a new string D that differs from all M_i .

Και στη θέση $(D, \langle D \rangle)$;
Η θέση αυτή θα πρέπει να έχει τιμή
αντίθετη του εαυτού της.
Άτοπο!

Μη αναγνωρίσιμες γλώσσες

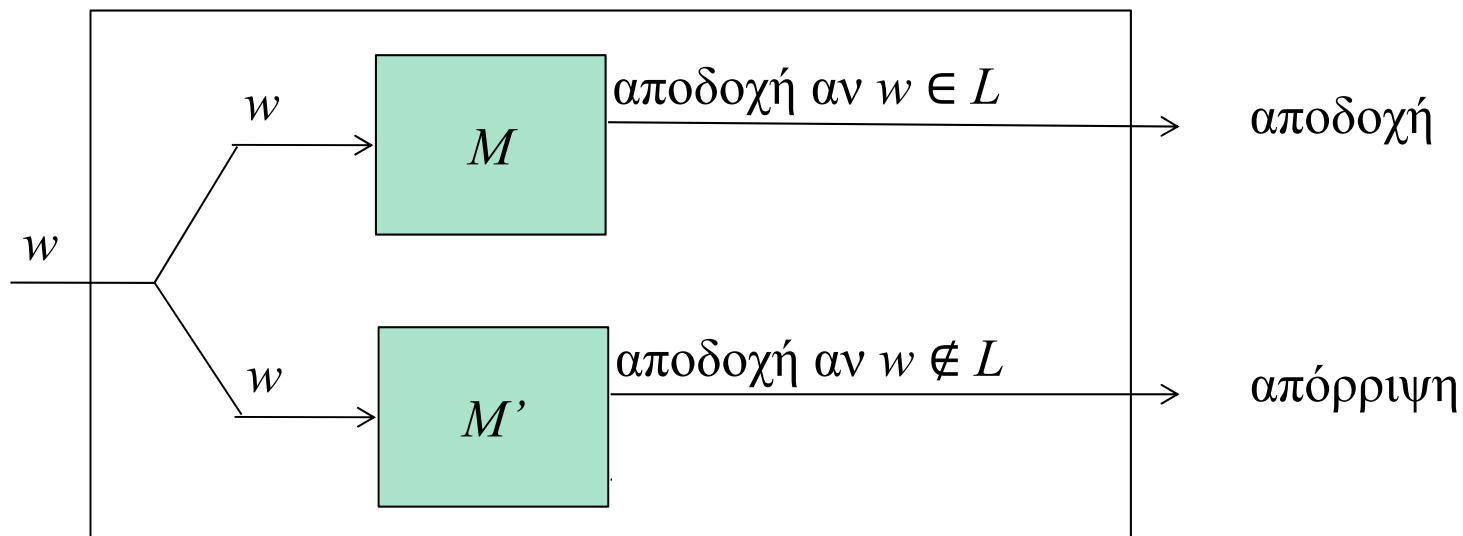
- Μια γλώσσα είναι **διαγνώσιμη** αν υπάρχει μηχανή Turing που να την διαγιγνώσκει.
- Μια γλώσσα είναι **αναγνωρίσιμη** αν υπάρχει μηχανή Turing που να την αναγνωρίζει.
- Μια γλώσσα είναι **συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη** το συμπλήρωμά της είναι αναγνωρίσιμη γλώσσα.
- **Θεώρημα:** Μια γλώσσα είναι διαγνώσιμη αν και μόνο αν είναι αναγνωρίσιμη και συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη.

Μη αναγνωρίσιμες γλώσσες

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι L και $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες, τότε η L είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

- Ιδέα της απόδειξης



Βασική Ιδέα της Απόδειξης

- Πως κατασκευάζουμε τη μηχανή που διαγιγνώσκει την L ;
- Προσπάθεια 1:
 $T =$ 'Για είσοδο w
 1. Προσομοίωσε την M με είσοδο το w . Αν αποδέχεται, αποδέξου.
 2. Προσομοίωσε την M' με είσοδο το w . Αν αποδέχεται, απόρριψε.
- Πρόβλημα: Αν η M εγκλωβιστεί στο w δεν θα μεταβούμε ποτέ στο Βήμα 2!

Βασική Ιδέα της Απόδειξης (συν.)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι L και $\bar{L}$ είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες, τότε η L είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

- Μηχανή Turing που διαγιγνώσκει την L :

Έστω M μηχανή Turing που αναγνωρίζει την L ,
και M' μηχανή Turing που αναγνωρίζει L

Με είσοδο w ,

while true

Εκτέλεσε t μεταβάσεις του M στην w . Αν αποδέχεται, αποδέξου.

Εκτέλεσε t μεταβάσεις του M' στην w . Αν αποδέχεται, απόρριψε.

Μη αναγνωρίσιμες γλώσσες

Η γλώσσα A_{TM} είναι αναγνωρίσιμη αλλά δεν είναι διαγνώσιμη.

- Θεωρείστε το συμπλήρωμα της γλώσσας A_{TM} :

$$\begin{aligned}\overline{A_{TM}} &= \{\langle M, w \rangle : \eta M \text{ είναι μια TM που δεν αποδέχεται την } w\} \\ &= \{\langle M, w \rangle : \eta M \text{ απορρίπτει ή εγκλωβίζεται στην } w\}\end{aligned}$$

- Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

Η γλώσσα $\overline{A_{TM}}$ είναι μη αναγνωρίσιμη.