Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Κανονικές Γλώσσες (2)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Κανονικές Εκφράσεις (1.3)

– *Τυπικός Ορισμός*

– *Ισοδυναμία με κανονικές γλώσσες*

Μη Κανονικές Γλώσσες (1.4)

– *Το Λήμμα της Άντλησης*

Κανονικές εκφράσεις

- Οι κανονικές πράξεις μας επιτρέπουν να συντάσσουμε εκφράσεις που αναπαριστούν γλώσσες.
- Οι εκφράσεις αυτές λέγονται *κανονικές*.
- Παράδειγμα: $(0 \cup 1)0^*$
- Ποια γλώσσα παράγεται;
  - Τα σύμβολα 0 και 1 είναι συντομογραφίες των $\{0\}$ και $\{1\}$
  - Άρα $(0 \cup 1) = (\{0\} \cup \{1\})=\{0,1\}$
  - Το 0^* σημαίνει $\{0\}^*$: η γλώσσα που αποτελείται από όλες τις λέξεις που περιέχουν οποιοδήποτε αριθμό από μηδενικά.
  - Η έκφραση $(0 \cup 1)0^*$ είναι συντομογραφία της συναρμογής των δύο γλωσσών
  - Έτσι $(0 \cup 1)0^*$ είναι η γλώσσα που περιέχει όλες οι λέξεις που ξεκινούν με 0 ή 1 ακολουθούμενες από οποιοδήποτε πλήθος από 0.

Κανονικές εκφράσεις

- Παρατηρείστε:
  - $(0 \cup 1)^*$: όλες οι λέξεις των οποίων τα σύμβολα είναι το 0 και το 1
  - Σ^*: όλες οι λέξεις επί του αλφάβητου Σ
- Ποια γλώσσα παράγεται από τις πιο κάτω εκφράσεις;
  - Σ^*1
  - $(0\Sigma^*) \cup (\Sigma^*1)$
- Σειρά εκτέλεσης (εκτός και αν καθορίζεται από παρενθέσεις)
  - Σώρευση
  - Συναρμογή
  - Ένωση
- Παράδειγμα:
  - $0\Sigma^* \cup 1 = (0(\Sigma^*)) \cup 1$

Κανονικές Εκφράσεις – Ορισμός

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Η R είμαι μια *κανονική έκφραση* αν είναι της μορφής

1. *a,* όπου *a* ένα σύμβολο του αλφάβητου Σ,

2. *ε*,

3. $\varnothing$,

4. $(R_1 \cup R_2)$, όπου R_1 και R_2 δύο κανονικές εκφράσεις,

5. $(R_1 R_2)$, όπου R_1 και R_2 δύο κανονικές εκφράσεις,

6. (R_1^*), όπου R_1 μια κανονική έκφραση.

Συντομογραφία: $R^+ = RR^*$

Κανονικές Εκφράσεις – Επεξήγηση ορισμού

Η R είμαι μια *κανονική έκφραση* αν είναι της μορφής

- a, όπου a ένα σύμβολο του αλφάβητου Σ
  - Η γλώσσα $\{a\}$
- ε
  - Η γλώσσα $\{\varepsilon\}$
- $\varnothing$
  - Η κενή γλώσσα
- $(R_1 \cup R_2)$, όπου R_1 και R_2 δύο κανονικές εκφράσεις
  - $\{w \mid w \in R_1$ ή $w \in R_2\}$
- $(R_1\, R_2)$, όπου R_1 και R_2 δύο κανονικές εκφράσεις
  - $\{xy \mid x \in R_1$ και $y \in R_2\}$
- $(R_1{}^*)$, όπου R_1 μια κανονική έκφραση
  - $\{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0$ και $\forall i, x_i \in R_1\}$
- Συντομογραφία: $R^+ = RR^*$
  - $\{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 1$ και $\forall i, x_i \in R\}$

Παραδείγματα

- 0^*10^*
  - $\{w \mid$ η w περιέχει ακριβώς ένα $1\}$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
  - $\{w \mid$ η w είναι λέξη άρτιου μήκους$\}$
- $\Sigma^*010\Sigma^*$
  - $\{w \mid$ η w περιέχει την υπολέξη $010\}$
- $1^*0^* \cup 01^*$
  - $\{w \mid$ η w αρχίζει με μηδέν ή περισσότερα 1 που ακολουθούνται με μηδέν ή περισσότερα 0, ή ξεκινάει με ένα 0 που ακολουθείται από μηδέν ή περισσότερα $1\}$
- $1^*\varnothing = \varnothing$
- $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$

Ισοδυναμία με πεπερασμένα αυτόματα

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Μια γλώσσα είναι κανονική *αν και μόνο* *αν* υπάρχει κανονική έκφραση που την περιγράφει.

- Εναλλακτικές διατυπώσεις
  - Μια γλώσσα αναγνωρίζεται από ένα DFA αν και μόνο αν υπάρχει κανονική έκφραση που την περιγράφει.
  - Μια γλώσσα αναγνωρίζεται από ένα NFA αν και μόνο αν υπάρχει κανονική έκφραση που την περιγράφει.
- Απόδειξη με 2 κατευθύνσεις
  1. Αν μια γλώσσα περιγράφεται από κάποια κανονική έκφραση, τότε είναι κανονική.
     - Για κάθε κανονική έκφραση υπάρχει κάποιο NFA που την αναγνωρίζει.
  2. Αν μια γλώσσα είναι κανονική τότε υπάρχει κανονική έκφραση που την περιγράφει.
     - Κάθε DFA μπορεί να μετατραπεί σε κανονική έκφραση

Κανονική Έκφραση ⇒ Κανονική Γλώσσα

- *Στόχος*: Να κατασκευάσουμε μηχανισμό για μετατροπή κάθε κανονικής έκφρασης σε NFA.

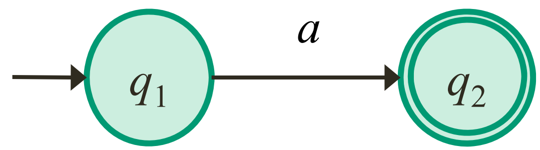
- Έστω A μια γλώσσα που περιγράφεται από μια έκφραση *R*

- Αν μπορούμε να μετατρέψουμε την *R* σε ένα NFA που να αναγνωρίζει την A, τότε η A είναι κανονική.

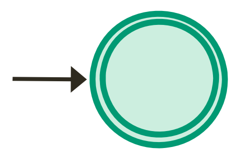
- Θα δείξουμε ότι η μετατροπή αυτή είναι εφικτή θεωρώντας όλες τις δυνατές μορφές που μπορεί να έχει η *R*:

Απόδειξη (1)

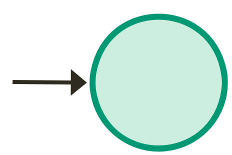
- Αν $R = a$, για κάποιο a στο αλφάβητο Σ, έχουμε
  - $L(R) = \{a\}$ και κατασκευάζουμε το πιο κάτω NFA που την αναγνωρίζει:



- Αν $R = \varepsilon$, έχουμε
  - $L(R) = \{\varepsilon\}$ και κατασκευάζουμε το πιο κάτω NFA που την αναγνωρίζει:



- Αν $R = \varnothing$, έχουμε
  - $L(R) = \varnothing$ και κατασκευάζουμε το πιο κάτω NFA που την αναγνωρίζει:



Απόδειξη (2)

- Ένωση: Αν $R = R_1 \cup R_2$
  - Αφού φτιάξουμε NFA που αναγνωρίζουν τις $L(R_1)$ και $L(R_2)$, χρησιμοποιούμε την κατασκευή της κλειστότητας ως προς την ένωση για να φτιάξουμε αυτόματο που αποδέχεται την $L(R)$.

- Συναρμογή: Αν $R = R_1 R_2$
  - Αφού φτιάξουμε NFA που αναγνωρίζουν τις $L(R_1)$ και $L(R_2)$, χρησιμοποιούμε την κατασκευή της κλειστότητας ως προς τη συναρμογή για να φτιάξουμε αυτόματο που αποδέχεται την $L(R)$.

- Σώρευση: Αν $R = R_1^*$
  - Αφού φτιάξουμε NFA που αναγνωρίζει την $L(R_1)$, χρησιμοποιούμε την κατασκευή της κλειστότητας ως προς τη σώρευση για να φτιάξουμε αυτόματο που αποδέχεται την $L(R)$.

Άσκηση

- Να μετατρέψετε τις πιο κάτω κανονικές εκφράσεις σε NFA.

  – $(ab \cup a)^*$

  – $(a \cup b)^*aba$

Κανονική Γλώσσα $\Rightarrow$ Κανονική Έκφραση

- *Στόχος*: Να κατασκευάσουμε μηχανισμό για μετατροπή κάθε κανονικής γλώσσας σε κανονική έκφραση.

- Αφού η γλώσσα είναι κανονική τότε υπάρχει ένα DFA που την αναγνωρίζει

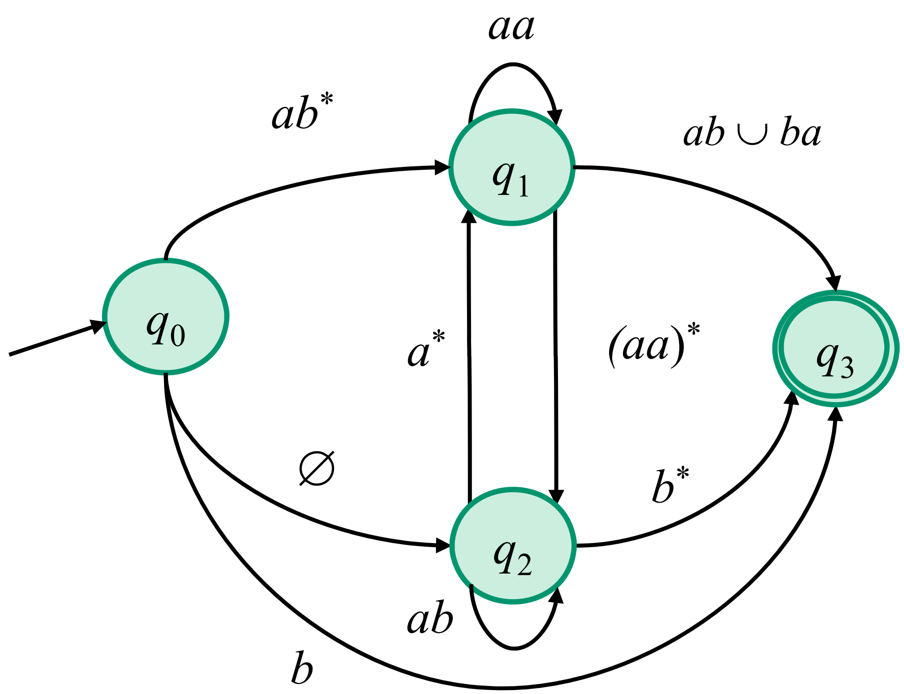
- Πρέπει να περιγράψουμε μια διαδικασία που μετατρέπει DFA σε ισοδύναμες κανονικές εκφράσεις

- Διαδικασία: Μετατροπή από DFA σε *γενικευμένο μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο*, GNFA (Generalized, nondeterministic finite automaton), και από GNFA σε κανονική έκφραση.

Γενικευμένο NFA (GNFA)

- Σε ένα GNFA τα βέλη μετάβασης επιγράφονται με κανονικές εκφράσεις και όχι μόνο με σύμβολα του Σ_ε.

- Παράδειγμα:



Μορφή GNFA

- Η εναρκτήρια κατάσταση
  - έχει βέλη προς όλες τις καταστάσεις εκτός από τον εαυτό της
  - δεν έχει εισερχόμενο βέλος

- Η κατάσταση αποδοχής
  - είναι μοναδική και διάφορη από την αρχική
  - έχει εισερχόμενα βέλη από όλες τις υπόλοιπες καταστάσεις εκτός από τον εαυτό της
  - δεν έχει κανένα εξερχόμενο βέλος

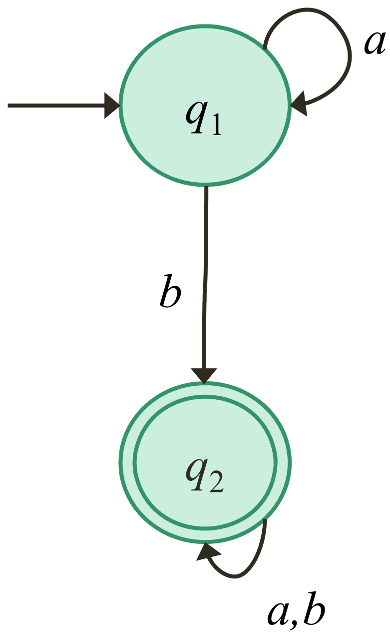
- Κάθε κατάσταση εκτός από την εναρκτήρια και την τελική
  - έχει εξερχόμενα βέλη προς όλες τις άλλες καταστάσεις (εκτός από την αρχική) και προς τον εαυτό της.

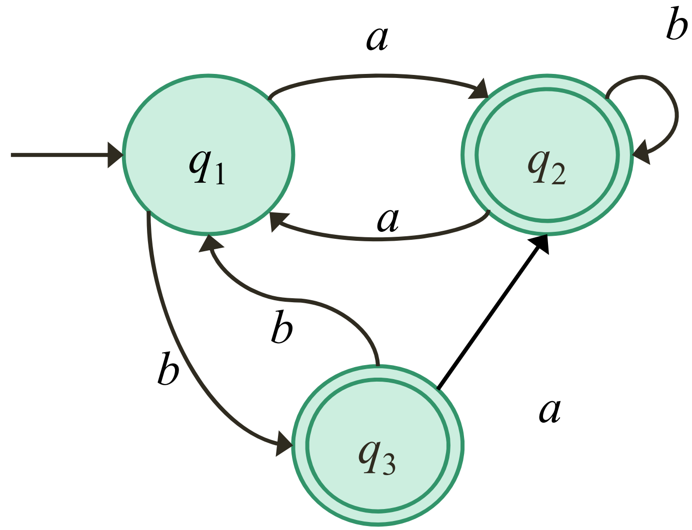
Μετατροπή DFA σε GNFA (1)

- Βήμα 1:
  - Προσθέτουμε μια νέα αρχική κατάσταση με βέλος ε προς την παλιά αρχική
  - Προσθέτουμε μια νέα κατάσταση αποδοχής με εισερχόμενα βέλη ε από όλες τις παλιές καταστάσεις αποδοχής
- Βήμα 2:
  - Αν κάποιο βέλος έχει περισσότερα από ένα σύμβολα τότε αντικαθιστούμε τα σύμβολα με την ένωση των συμβόλων
- Βήμα 3:
  - Αν από μια κατάσταση σε κάποια άλλη δεν υπάρχει κανένα βέλος τότε προσθέτουμε ένα με επιγραφή $\emptyset$ (εκτός προς την αρχική και από την τελική!)

Άσκηση

- Να μετατρέψετε τα πιο κάτω DFA σε GNFA.



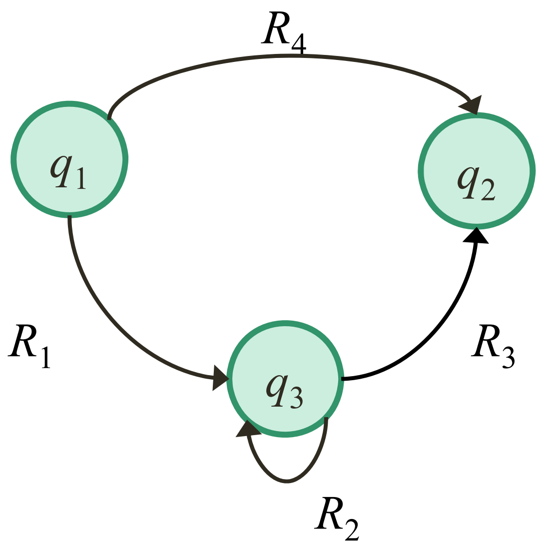


Μετατροπή GNFA σε Κανονική Έκφραση

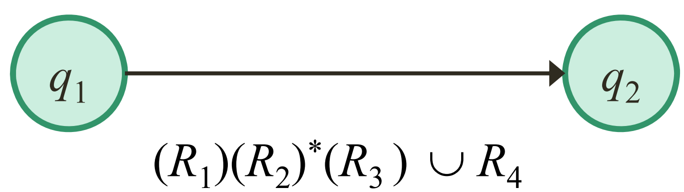
- Στόχος: Να μετατρέψουμε το GNFA που κατασκευάσαμε για το αρχικό DFA σε GNFA με δύο καταστάσεις.
  - Αν το GNFA έχει 2 καταστάσεις (αρχική και τελική) τότε η κανονική έκφραση είναι η επιγραφή του μοναδικού βέλους από την αρχική στην κατάσταση αποδοχής
  - Αν το GNFA έχει k >2 καταστάσεις τότε αφαιρούμε μια κατάσταση και αλλάζουμε την επιγραφή των βελών για να πάρουμε ένα ισοδύναμο GNFA k-1 καταστάσεων. Επαναλαμβάνουμε μέχρι k=2.

Αφαίρεση κατάστασης – Παράδειγμα

- Πως μπορούμε να αφαιρέσουμε την κορυφή q_3 από το αυτόματο που ακολουθεί;



- Θα πρέπει να περιγράψουμε το μονοπάτι $q_1q_3q_2$ μέσω του q_1q_2 επεκτείνοντας κατάλληλα την κανονική έκφραση του μονοπατιού που θα παραμείνει.



Τυπικός Ορισμός GNFA

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Γενικευμένο μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα $(Q, \Sigma, \delta, q_{έναρξης}, q_{αποδοχής})$, όπου

1. Q είναι το πεπερασμένο σύνολο *καταστάσεων*,
2. Σ είναι το *αλφάβητο εισόδου*,
3. $\delta: (Q - q_{αποδοχής}) \times (Q - q_{έναρξης}) \rightarrow \mathcal{R}$, είναι η *συνάρτηση μεταβάσεων*,
4. $q_{έναρξης} \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση*, και
5. $q_{αποδοχής} \in Q$ είναι η *κατάσταση αποδοχής*.

Συμβολισμός: $\mathcal{R}$ = το σύνολο των κανονικών εκφράσεων

Αλγόριθμος μετατροπής

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ(G)

1. Έστω G = (Q, Σ, δ, $q_{έναρξης}$, $q_{αποδοχής}$) με $|Q| = k$.
2. Αν $k = 2$
   – Επέστρεψε R: η έκφραση στο βέλος από την αρχική στην τελική κατάσταση
3. Αν $k > 2$
   – Επέλεξε οποιαδήποτε κατάσταση $q^* \in Q - \{q_{έναρξης}, q_{αποδοχής}\}$
   – Κατασκευάζουμε το G' =(Q', Σ, δ', $q_{έναρξης}$, $q_{αποδοχής}$)με μία λιγότερη κατάσταση ως εξής:
   - $Q' = Q - \{q^*\}$
   - Για κάθε $q_i \in Q' - \{q_{αποδοχής}\}$, $q_j \in Q' - \{q_{έναρξης}\}$,

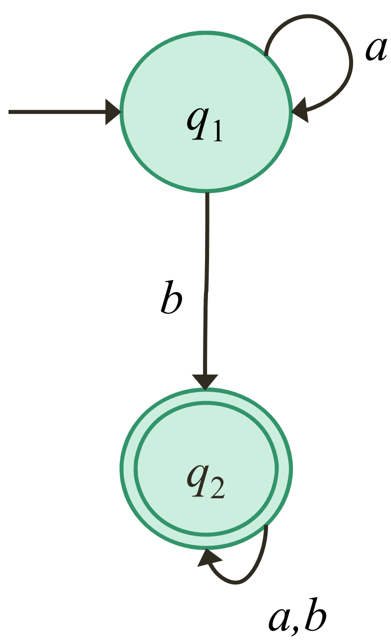
     $$\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup R_4$$

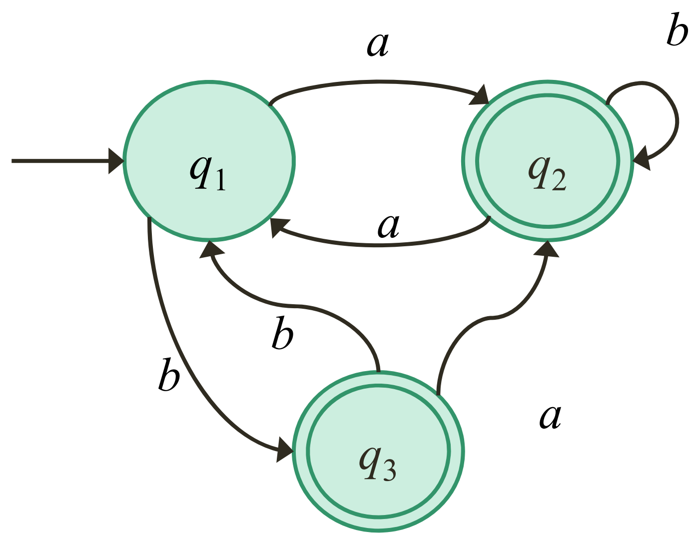
     όπου

     $R_1 = \delta(q_i, q^*)$, $R_2 = \delta(q^*, q^*)$, $R_3 = \delta(q^*, q_j)$, $R_4 = \delta(q_i, q_j)$

Άσκηση

- Να υπολογίσετε τις κανονικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στα πιο κάτω αυτόματα.





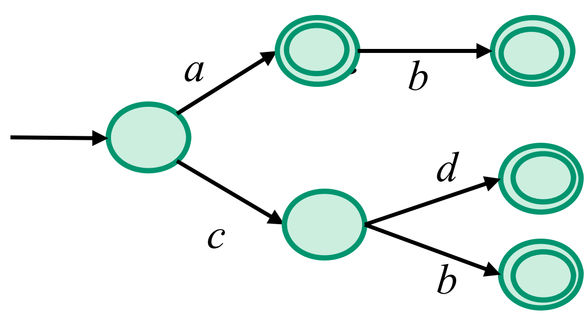
Κανονικές και Μη Κανονικές Γλώσσες

- Μία γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν
  - Υπάρχει DFA που να την αναγνωρίζει
  - Υπάρχει NFA που να την αναγνωρίζει
  - Υπάρχει κανονική έκφραση που να την περιγράφει

- Μία γλώσσα είναι πεπερασμένη αν περιέχει πεπερασμένο αριθμό λέξεων.

- Είναι όλες οι πεπερασμένες γλώσσες κανονικές;
  - ΝΑΙ! Δημιουργούμε ένα αυτόματο με ένα «μονοπάτι» για κάθε λέξη της γλώσσας.

- Παράδειγμα: Η γλώσσα $\Lambda = \{a, ab, cd, cb\}$



Μη Κανονικές Γλώσσες

- Είναι όλες οι γλώσσες κανονικές;
- Όχι. Για παράδειγμα η γλώσσα

  $$B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

  δεν είναι κανονική. Δεν υπάρχει κανένα πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει. Γιατί;
- Για να αναγνωρίσει τις λέξεις της ένα αυτόματο πρέπει να θυμάται πόσα 0 έχει διαβάσει. Όμως…
  - Το πλήθος των 0 δεν είναι φραγμένο ⇒ απεριόριστο πλήθος περιπτώσεων/καταστάσεων.
- Ασθενές επιχείρημα. Η πιο κάτω γλώσσα είναι κανονική

  D={w | η w περιέχει τις υπολέξεις 01 και 10 τις ίδιες φορές}
  - Αν και φαινομενικά πρέπει να μετρούμε υπολέξεις που δυνατόν να εμφανιστούν για μη πεπερασμένο αριθμό φορών υπάρχει NFA (DFA) που αναγνωρίζει τη γλώσσα. (φροντιστήριο)

Λήμμα της Άντλησης

- Πως αποδεικνύουμε ότι μια γλώσσα ΔΕΝ είναι κανονική;
  – ΛΗΜΜΑ ΑΝΤΛΗΣΗΣ

- Λήμμα Άντλησης: Όλες οι λέξεις μιας κανονικής γλώσσας που έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο κάποιας συγκεκριμένης τιμής, η οποία ονομάζεται *μήκος άντλησης*, επιδέχονται μια διαδικασία «άντλησης».
  – Κάθε τέτοια λέξη περιλαμβάνει ένα τμήμα που μπορεί να επαναληφθεί και η προκύπτουσα λέξη ανήκει στη γλώσσα.

Λήμμα της Άντλησης

<u>Λήμμα της Άντλησης</u>

Για κάθε κανονική γλώσσα A, υπάρχει αριθμός p (το *μήκος άντλησης* αυτής) τέτοιος ώστε κάθε λέξη s της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p να μπορεί να χωριστεί σε τρία τμήματα, $s = xyz$, που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. Για κάθε $i \geq 0$, $xy^iz \in A$
2. $|y| > 0$, και
3. $|xy| \leq p$.

Αποδεικτική ιδέα

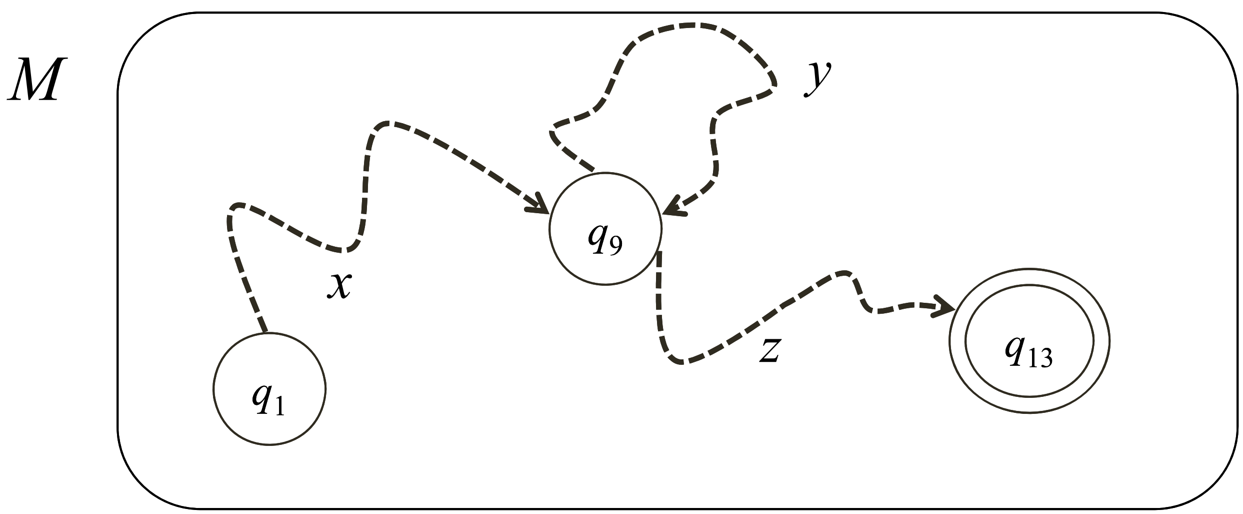
- Έστω $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ένα ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει την A
- Ορίζουμε *μήκος άντλησης* p = αριθμός καταστάσεων του M
- Θέλουμε να δείξουμε:
  - Κάθε λέξη της Α με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη xyz που να ικανοποιούν τις συνθήκες του λήμματος
- Τι κι αν όλες οι λέξεις έχουν μήκος μικρότερο του p;
  - Το λήμμα αληθεύει *εν κενώ*.

Αποδεικτική Ιδέα (1)

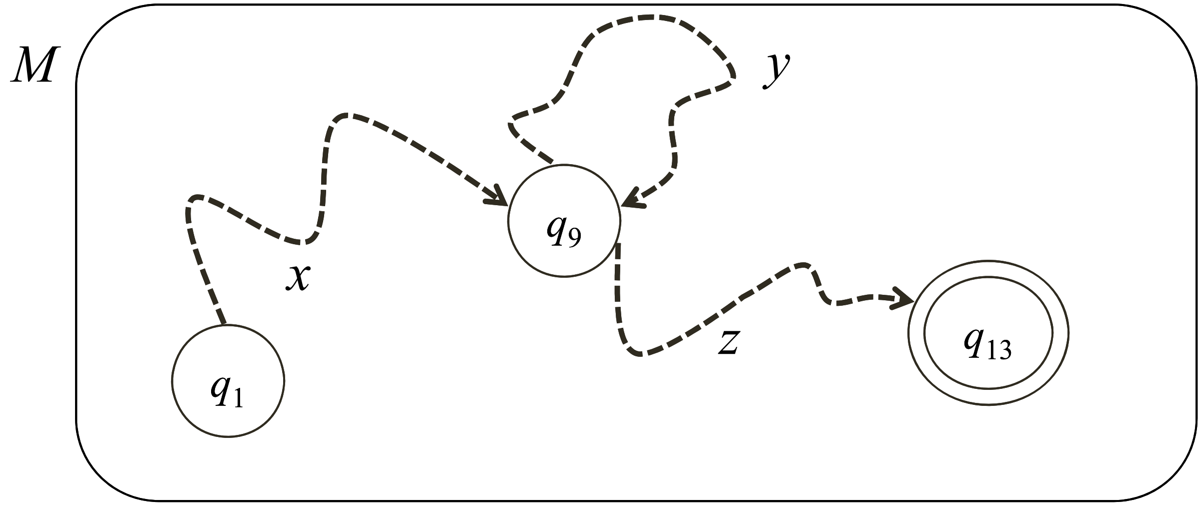
- Υποθέτουμε ότι έχουμε μια λέξη $w \in A$ τ.ω.
  - $|w| = n$ και $n \geq p$
- Αφού $w \in A$ τότε το M αποδέχεται την λέξη
  - Έστω q_{13} η κατάσταση αποδοχής που φτάνει η Μ με το τέλος της w
- Άρα υπάρχει μια ακολουθία n+1 καταστάσεων
  - $q_1 q_3 q_{20} q_9 \ldots q_{13}$
- Αφού έχουμε $p \leq n$ καταστάσεις στο M
  - Αρχή του Περιστερώνα: Υπάρχει μια κατάσταση που επαναλαμβάνεται

Αποδεικτική Ιδέα (2)

- Έστω ότι η κατάσταση που επαναλαμβάνεται είναι η q_9
- Μπορούμε να χωρίσουμε την w σε τρία μέρη
  - x: το τμήμα της w πριν την πρώτη εμφάνιση της q_9
  - y: το τμήμα ανάμεσα στις δύο εμφανίσεις του q_9
  - z: η υπόλοιπη λέξη



Αποδεικτική Ιδέα (3)



1. για κάθε $i \geq 0$, $xy^iz \in A$
   – Π.χ.: Το M αποδέχεται την $xyyz$ (;)
2. $|y| > 0$
   – Ναι: το y είναι το τμήμα της λέξης μεταξύ δύο διαφορετικών εμφανίσεων της q_9
3. $|xy| \leq p$
   – Το q_9 είναι η πρώτη επανάληψη
   – Οι πρώτες p+1 καταστάσεις περιέχουν μια επανάληψη

Απόδειξη Μη Κανονικότητας

- Δοθείσας μιας γλώσσας *B* πως δείχνουμε ότι δεν είναι κανονική;
- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε (για να φτάσουμε σε αντίφαση) ότι η *B* είναι κανονική
- Βήμα 2:
  - Θεωρούμε ότι η *B* περιέχει λέξεις μήκους μεγαλύτερο ή ίσο με κάποιο *p* (μήκος άντλησης)
- Βήμα 3:
  - Βρίσκουμε μια λέξη *w* της *B* η οποία δεν επιδέχεται άντληση
- Βήμα 4:
  - Μελετούμε όλες τις δυνατές διαιρέσεις της *w* στα τμήματα *x*, *y*, *z*, και δείχνουμε ότι υπάρχει τιμή για το *i* τέτοια ώστε $xy^iz \notin B \Rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

Παράδειγμα 1

- Έστω B = $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$
- Βήμα 1:
  – Υποθέτουμε ότι B είναι κανονική
- Βήμα 2:
  – Έστω p το μήκος της άντλησης
- Βήμα 3:
  – Επιλέγουμε την λέξη $w = 0^p 1^p$
  – Από το λήμμα της άντλησης $w = xyz$ τ.ω. για $i \geq 0$, $xy^i z \in B$

Παράδειγμα 1

- Βήμα 4:
  1. Η λέξη y έχει μόνο 0
     - Τότε η λέξη $xyyz$ έχει περισσότερα 0 από 1 $\Rightarrow$ άτοπο
  2. Η λέξη y έχει μόνο 1
     - Τότε η λέξη $xyyz$ έχει περισσότερα 1 από 0 $\Rightarrow$ άτοπο
  3. Η λέξη y έχει και 0 και 1
     - Τότε η λέξη $xyyz$ πιθανόν να έχει το ίδιο πλήθος 0 και 1 αλλά αυτά δεν βρίσκονται στη σωστή σειρά $\Rightarrow$ άτοπο

- Όλες οι περιπτώσεις μας οδηγούν σε άτοπο
  – Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άντληση στη λέξη 0^p1^p
  – Η B δεν είναι κανονική

- Σημείωση: Οι περιπτώσεις 2 και (3) πιο πάνω ήταν αχρείαστο να αναλυθούν αφού, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, τα xy βρίσκονται στις πρώτες p θέσεις της λέξης.

Παράδειγμα 2

- Έστω $C=\{w \mid$ η w έχει το ίδιο πλήθος από 0 και 1$\}$
- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι C είναι κανονική
- Βήμα 2:
  - Έστω p το μήκος της άντλησης
- Βήμα 3:
  - Επιλέγουμε τη λέξη $w = 0^p 1^p$
  - Από το λήμμα της άντλησης $w = xyz$ τ.ω. για $i \geq 0$, $xy^iz \in C$
  - Φαίνεται ότι η w επιδέχεται άντληση!!
    - $x = \varepsilon$, $z = \varepsilon$ και $y = w$

Παράδειγμα 2

- Βήμα 4:
  - Θα χρειαστούμε τη συνθήκη 3: Η w πρέπει να χωριστεί έτσι ώστε $|xy| \leq p$
  - Αφού $|xy| \leq p$ τότε στο $w = xyz = 0^p 1^p$ το y περιέχει μόνο 0
  - Άρα η λέξη $xyyz \notin C$ => ΑΤΟΠΟ

- Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άντληση στη λέξη $0^p 1^p$
  - Η C δεν είναι κανονική

Παράδειγμα 3

- Έστω $D = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

- Βήμα 1:
  - Υποθέτουμε ότι η D είναι κανονική
- Βήμα 2:
  - Έστω p το μήκος της άντλησης
- Βήμα 3:
  - Επιλέγουμε τη λέξη $w = 0^p10^p1$
  - Από το λήμμα της άντλησης $w = xyz$ τ.ω. για $i \geq 0$, $xy^iz \in D$
- Βήμα 4:
  - Αφού $|xy| \leq p$ τότε στο $w = xyz = 0^p10^p1$ το y περιέχει μόνο 0
  - Άρα η λέξη $xyyz \notin D \Rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

Άσκηση

Έστω $E = \{0^i 1^j \mid i > j\}$. Να δείξετε ότι η γλώσσα E δεν είναι κανονική.

Μη Κανονικότητα και το Λήμμα της Άντλησης

Λήμμα της Άντλησης

Για κάθε κανονική γλώσσα A, υπάρχει αριθμός p (το *μήκος άντλησης* αυτής) τέτοιος ώστε κάθε λέξη s της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p να μπορεί να χωριστεί σε τρία τμήματα, $s = xyz$, που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. Για κάθε $i \geq 0$, $xy^iz \in A$
2. $|y| > 0$, και
3. $|xy| \leq p$.

- Το Λήμμα της Άντλησης διατυπώνει ότι κάθε κανονική γλώσσα έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα.
- Επομένως αν κάποια γλώσσα δεν έχει αυτή την ιδιότητα τότε δεν είναι κανονική.
- Όμως, αυτό δεν συνεπάγεται ότι κάθε γλώσσα που έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα είναι και κανονική!
  - (Αν Α $\rightarrow$ Β τότε όχι απαραίτητα Β $\rightarrow$ Α)

Μη Κανονικότητα και το Λήμμα της Άντλησης

- Στην πραγματικότητα υπάρχουν και μη κανονικές γλώσσες που ενώ είναι μη κανονικές ικανοποιούν το Λήμμα της Άντλησης.
- Παράδειγμα τέτοιας μη κανονικής γλώσσας είναι η

$$L = \{ab^j c^j \mid j \geq 0\} \cup \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \wedge i \neq 1\}$$

- Ενώ η γλώσσα αυτή δεν είναι κανονική, μπορούμε να δείξουμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα που αναφέρεται στο Λήμμα της Άντλησης. (δείξτε το!)
- Μη κανονικότητα της L μπορεί να δειχθεί θεωρώντας τη γλώσσα

$$L \cap L(ab^* c^*) = \{ab^j c^j \mid j \geq 0\}$$

Αν η L ήταν κανονική, κανονική θα ήταν και η πιο πάνω τομή η οποία όμως μπορούμε να δείξουμε ότι είναι μη κανονική.