Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα
Κανονικές Γλώσσες (1)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Πεπερασμένα Αυτόματα (Κεφάλαιο 1.1, Sipser)
- *Ορισμός πεπερασμένων αυτομάτων και ορισμός του υπολογισμού*
- *Σχεδίαση πεπερασμένων αυτομάτων*

Ανταιτιοκρατία (Κεφάλαιο 1.2, Sipser)
- *Ορισμός μη ντετερμινιστικών αυτομάτων*
- *Ισοδυναμία ντετερμινιστικών και μη ντετερμινιστικών αυτομάτων*
- *Κλειστότητα ως προς τις κανονικές πράξεις*

Πεπερασμένα αυτόματα

- Ερώτημα: Τι είναι υπολογιστής;
  - Ποιες οι δυνατότητές του;
  - Ποιοι οι περιορισμοί του;

- Η Θεωρία Υπολογισμού επιδιώκει να απαντήσει στα ερωτήματα αυτά στα πλαίσια διάφορων *υπολογιστικών μοντέλων*.

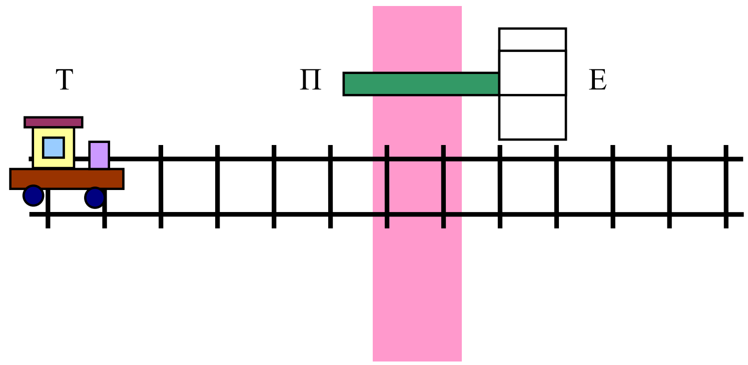
- Πεπερασμένα αυτόματα:
  - Απλούστερο υπολογιστικό μοντέλο
  - Περιορισμένη μνήμη

Αναπαράσταση Πεπερασμένων Αυτομάτων

- Γραφήματα με βάρη
  - Κορυφές – καταστάσεις
  - Ακμές – μεταβάσεις
  - Βάρη – ενέργειες που προκαλούν τη μετάβαση

Διασταύρωση

- Μια σιδηροδρομική γραμμή διασταυρώνεται με κάποιο δρόμο.

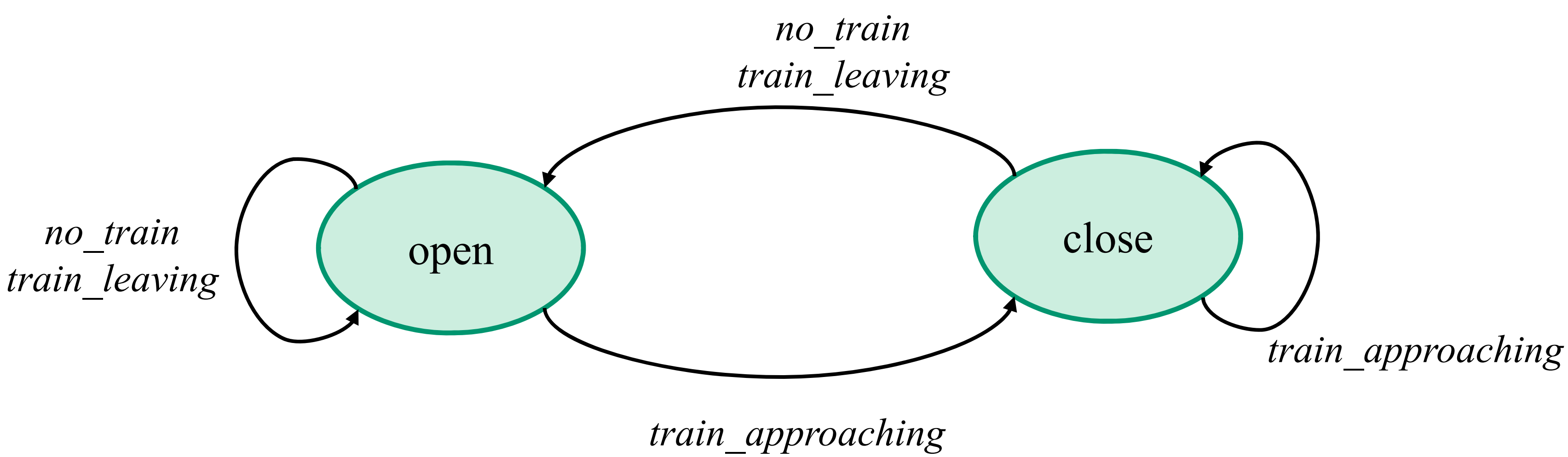


T: τραίνο
Π: πύλη
E: Ελεγκτής

- Ένας ελεγκτής πρέπει να κλείνει την πύλη κάθε φορά που το τραίνο πλησιάζει:
  – Όταν δεν υπάρχει τραίνο κοντά στο δρόμο η πύλη μπορεί και πρέπει να είναι ανοικτή
  – Όταν πλησιάζει κάποιο τραίνο στο δρόμο, αν η πύλη είναι ανοικτή πρέπει να κλείσει και αν είναι κλειστή πρέπει να παραμείνει κλειστή
  – Όταν το τραίνο απομακρύνεται και η πύλη είναι κλειστή τότε μπορεί να ανοίξει.

Διασταύρωση

- Καταστάσεις ελεγκτή
  - Κλείσε την πύλη: *close*
  - Άνοιξε την πύλη: *open*
- Μηνύματα προς ελεγκτή
  - Το τραίνο πλησιάζει: *train_approaching*
  - Το τραίνο φεύγει: *train_leaving*
  - Δεν υπάρχει τραίνο: *no_train*



Διασταύρωση

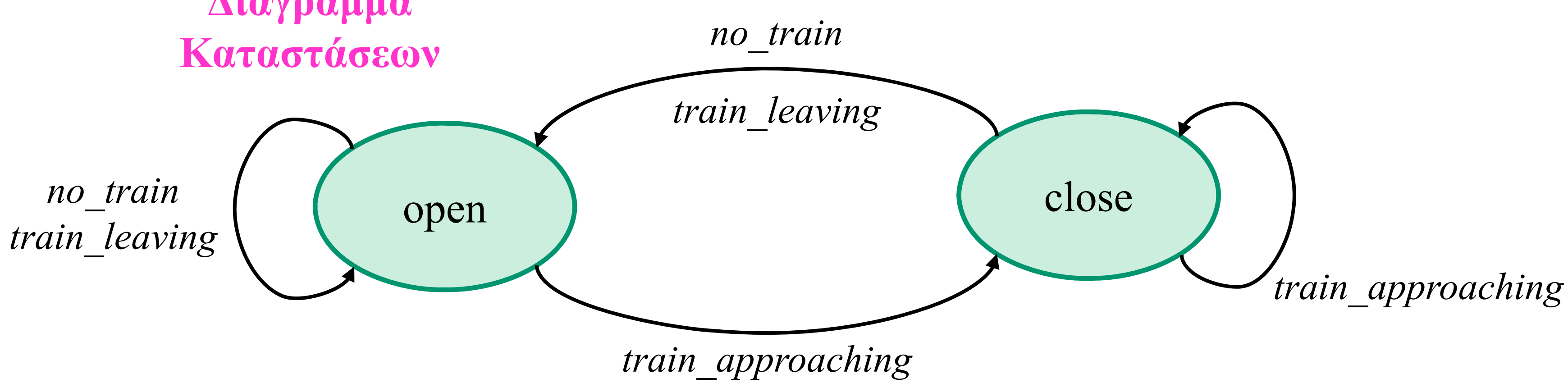
Καταστάσεις ελεγκτή

- Κλείσε την πύλη: *close*
- Άνοιξε την πύλη: *open*

Μηνύματα προς ελεγκτή

- Το τραίνο πλησιάζει: *train_approaching*
- Το τραίνο φεύγει: *train_leaving*
- Δεν υπάρχει τραίνο: *no_train*

Διάγραμμα Καταστάσεων



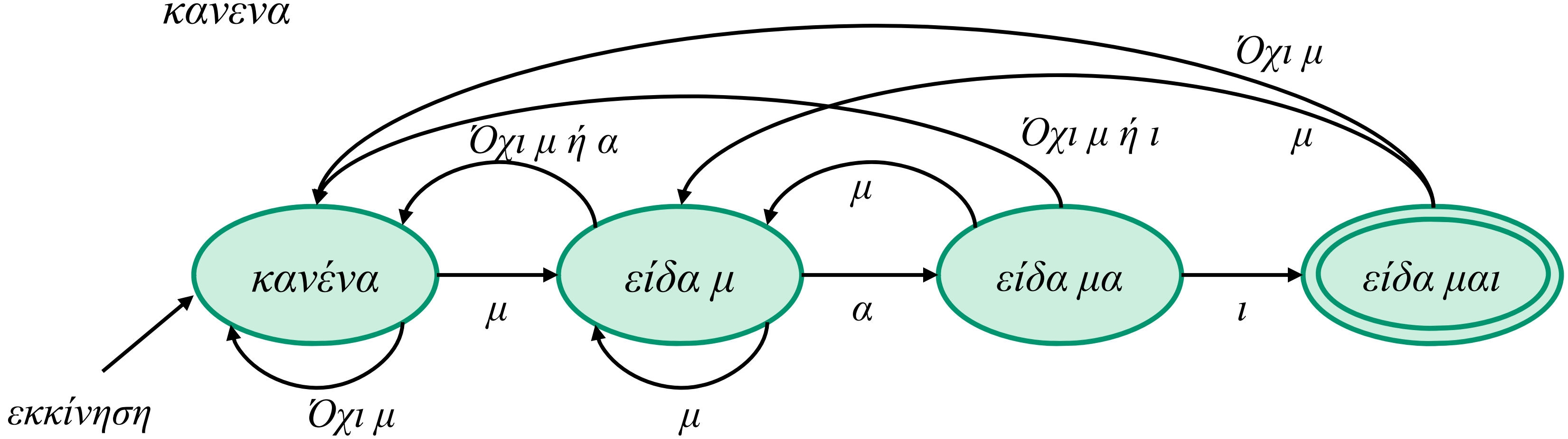
Πίνακας Μεταβάσεων:

	no_train	**train_approaching**	**train_leaving**
open	open	close	open
close	open	close	open

Αναγνώριση συμβολοσειρών

- Θέλουμε να αναγνωρίσουμε κατά πόσο μια ακολουθία τελειώνει στη συμβολοσειρά «μαι»

- Καταστάσεις
  - Έχω δει συμβολοσειρά που τελειώνει σε «μ»: *είδα μ*
  - Έχω δει συμβολοσειρά που τελειώνει σε «μα»: *είδα μα*
  - Έχω δει συμβολοσειρά που τελειώνει σε «μαι»: *είδα μαι*
  - Η συμβολοσειρά που έχω δει δεν τελειώνει σε κανένα από τα πιο πάνω: *κανένα*



Πεπερασμένα Αυτόματα – Ορισμός

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα (Q, Σ, δ, q_0, F), όπου

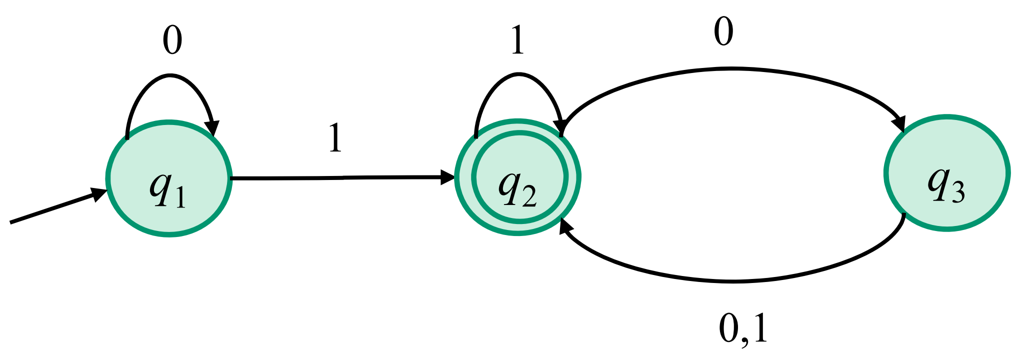
1. Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται *καταστάσεις*,
2. Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται *αλφάβητο*,
3. $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$, είναι η *συνάρτηση μεταβάσεων*,
4. $q_0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση* (αρχική κατάσταση),
5. F είναι το *σύνολο των καταστάσεων αποδοχής* (τελικές καταστάσεις).

Πεπερασμένα αυτόματα, ντετερμινιστικά αυτόματα,
deterministic automata, DFA

Παράδειγμα Πεπερασμένου Αυτομάτου

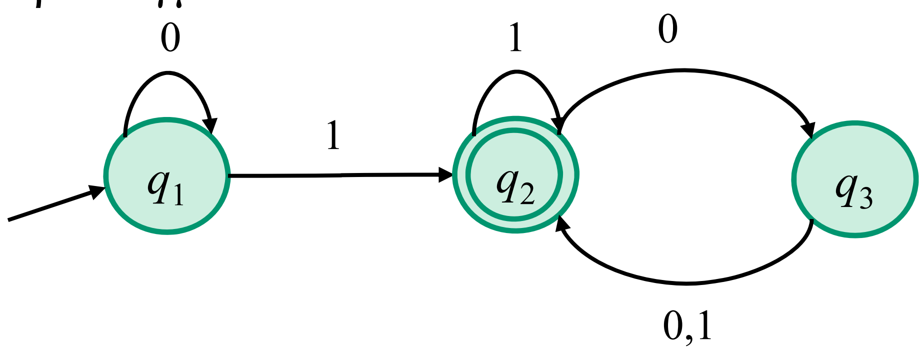
- $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, όπου
  - $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
  - $\Sigma = \{0,1\}$
  - η συνάρτηση μεταβάσεων δ περιγράφεται στον πίνακα
  - εναρκτήρια κατάσταση είναι η q_1
  - και $F = \{q_2\}$

	0	**1**
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2



Επεξεργασία Αυτομάτων

- Έστω μια λέξη $w = w_1 w_2 \ldots w_n$. Όταν το αυτόματο M λάβει την λέξη w την επεξεργάζεται ως εξής:
  - Ξεκινώντας από την εναρκτήρια κατάσταση το αυτόματο λαμβάνει τα σύμβολα της λέξης ένα προς ένα.
  - Μετά από την ανάγνωση κάθε συμβόλου, το αυτόματο μεταβαίνει από την τρέχουσα κατάσταση σε μία καινούρια κατάσταση επιλέγοντας τη μετάβαση που επιγράφεται με το συγκεκριμένο σύμβολο.
  - Μετά από την επεξεργασία και του τελευταίου συμβόλου το αυτόματο παράγει μια έξοδο:
    - Αν βρίσκεται σε κατάσταση αποδοχής, η έξοδος είναι *αποδοχή*
    - Διαφορετικά η έξοδος είναι *απόρριψη*
- Παράδειγμα



Λέξη 0010: Απόρριψη

Λέξη 1100: Αποδοχή

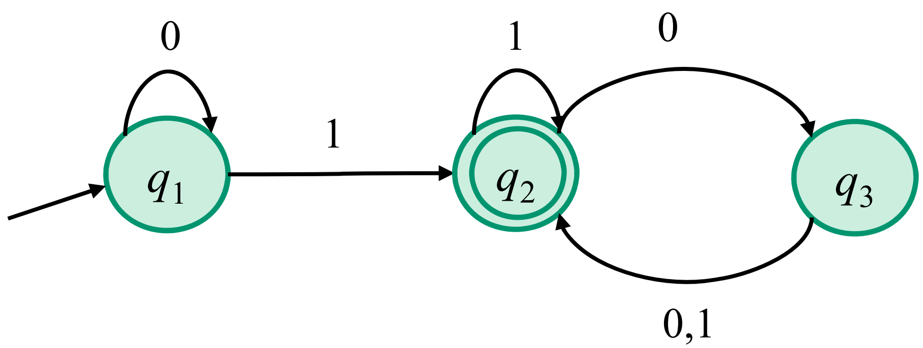
Λέξη 0010000: Αποδοχή

Ορολογία

- *Γλώσσα του αυτομάτου* M, L(M): το σύνολο όλων των λέξεων του αποδέχεται το αυτόματο M.

- Αν L(M) = A τότε λέμε ότι το M ***αναγνωρίζει*** την A
  - Κάθε αυτόματο αποδέχεται πολλές λέξεις αλλά αναγνωρίζει μια μόνο γλώσσα

- Ποια η γλώσσα του αυτόματου M_1;



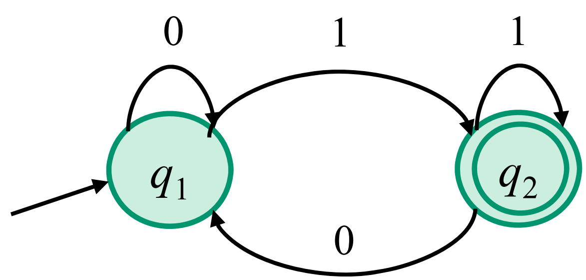
$L(M_1)$ = {w | η w περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο 1 και το τελευταίο 1 ακολουθείται από άρτιο αριθμό 0}

Παράδειγμα

- M_2=($\{q_1, q_2\}$, $\{0, 1\}$, δ, q_1, $\{q_2\}$)

	0	**1**
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- Διάγραμμα Καταστάσεων:



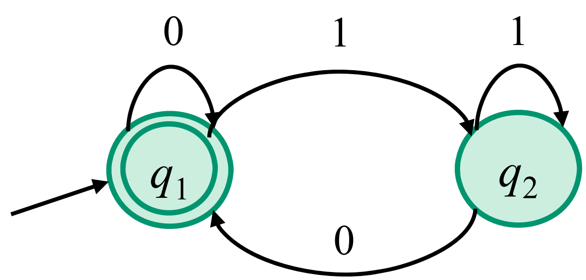
- L(M_2) = ;;
  – Δοκιμάζουμε κάποιες λέξεις εισόδου
    - 0, 1, 001, 1010, 100111
  – L(M_2) = $\{w \mid w$ τελειώνει σε $1\}$

Παράδειγμα

- M_3=({q_1, q_2}, {0, 1}, δ, q_1, {q_1})

	0	**1**
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- Διάγραμμα Καταστάσεων:



- L(M_3) = ;;
  - L(M_3) = {w | w τελειώνει σε 0 ή έχει μήκος 0}

Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *αποδέχεται* μια λέξη $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^n$ αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_n$ του Q που να ικανοποιεί τις συνθήκες:
  - $r_0 = q_0$
  - $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ για $i = 0,\ldots,n-1$, και
  - $r_n \in F$

- Το αυτόματο M αναγνωρίζει τη γλώσσα A αν:

$$\mathrm{A} = \{w \mid \text{το M αποδέχεται την } w\}$$

Κανονική Γλώσσα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια γλώσσα λέγεται *κανονική* αν υπάρχει πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει.

Σχεδίαση Αυτομάτων

- Πρόβλημα: Δοθείσας μιας γλώσσας σχεδιάστε ένα αυτόματο που να την αναγνωρίζει.

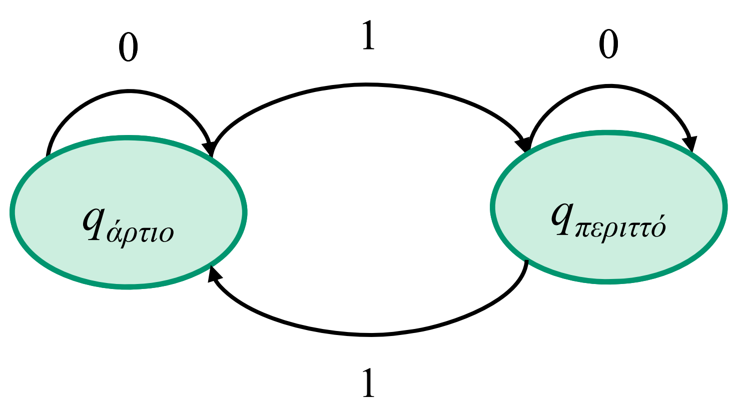
- Παράδειγμα 1: Α = {w | w έχει άρτιο αριθμό από 1}

  Βήμα 1: Καθορισμός καταστάσεων
  - Έλεγχος κάθε συμβόλου και αν το τμήμα της λέξης που εξετάστηκε ανήκει ή όχι στη γλώσσα
  - Καθορισμός πληροφοριών που πρέπει να θυμόμαστε:
    1. είτε ο αριθμός των 1 που διαβάσαμε είναι άρτιος
    2. είτε ο αριθμός των 1 που διαβάσαμε είναι περιττός
  - Αποδίδουμε σε κάθε περίπτωση μια κατάσταση

Σχεδίαση Αυτομάτων

Βήμα 2: Καθορισμός Μεταβάσεων

- Με βάση το πώς πρέπει να μετακινηθούμε μετά την ανάγνωση ενός συμβόλου
  - Ανάγνωση 0: αριθμός 1 δεν αλλάζει άρα μένουμε στην ίδια κατάσταση
  - Ανάγνωση 1: αριθμός 1 αλλάζει άρα αν είμαστε στο $q_{\text{άρτιο}}$ πάμε $q_{\text{περιττό}}$ και ανάποδα



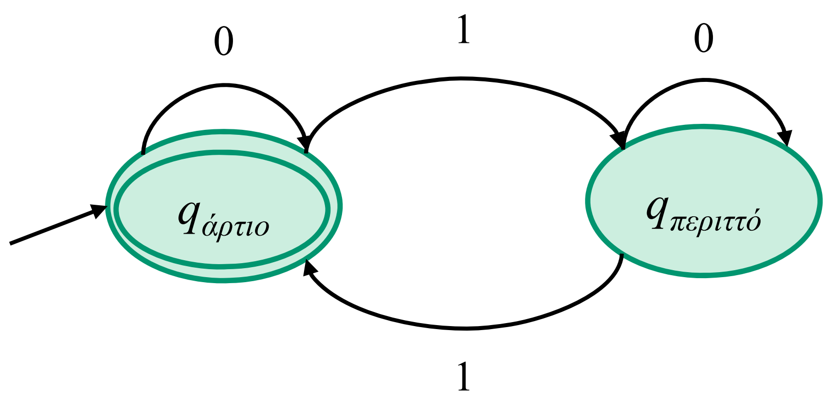
Σχεδίαση Αυτομάτων

Βήμα 3: Καθορισμός εναρκτήριας κατάστασης

- Αντιστοιχεί στην περίπτωση της λέξης με 0 σύμβολα.
- Εναρκτήρια το $q_{άρτιο}$ αφού σε 0 σύμβολα το πλήθος των 1 είναι άρτιο

Βήμα 4: Καθορισμός Τελικών Καταστάσεων

- Στην περίπτωσή μας το $q_{άρτιο}$



Πράξεις σε Κανονικές Γλώσσες

Έστω δυο γλώσσες A και B:

- **Ένωση**: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$
- **Συναρμογή (Σύμπτυξη)**: $AB = \{xy | x \in A \text{ and } y \in B\}$
- **Σώρευση**: $A^* = \{x_1 x_2 \dots x_k | k \geq 0 \text{ and } \forall x_i, x_i \in A\}$

Κλειστότητα

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Ένα σύνολο είναι *κλειστό ως προς κάποια πράξη* αν η πράξη αυτή, όταν εκτελείται σε μέλη του συνόλου, επιστρέφει ένα αντικείμενο που ανήκει επίσης στο σύνολο.

- Παράδειγμα
  - Το σύνολο των φυσικών είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό
  - Το σύνολο των φυσικών *δεν είναι κλειστό* ως προς την διαίρεση

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς τις κανονικές πράξεις.

Κλειστότητα ως προς την ένωση

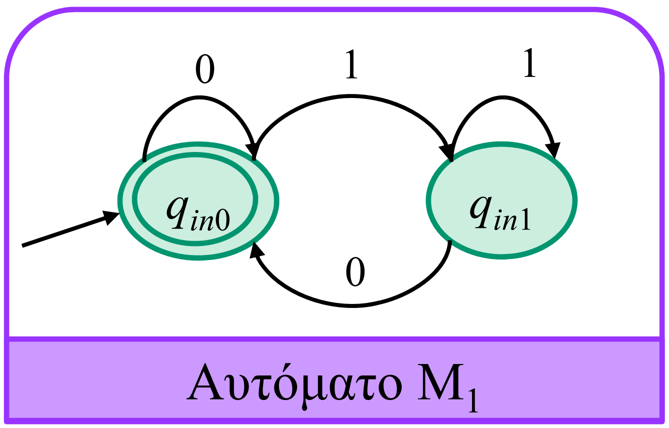
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

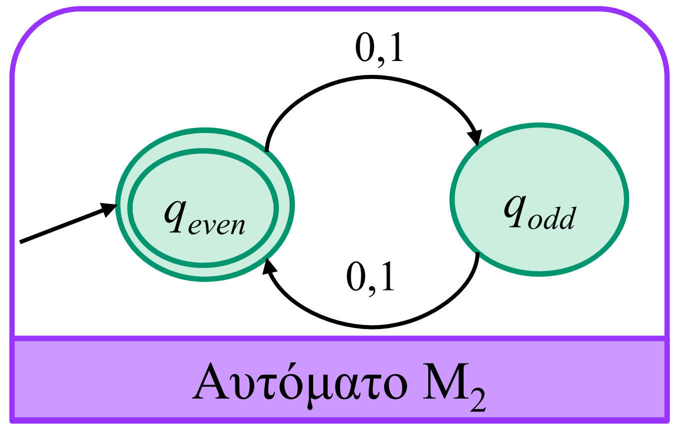
Η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση.

- Δηλαδή: Αν οι γλώσσες A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε το ίδιο ισχύει για τη γλώσσα $A_1 \cup A_2$.
- Βασική Ιδέα: Αφού οι A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε υπάρχουν αυτόματα M_1 και M_2 που τις αναγνωρίζουν. Συνδυάζουμε τα M_1 και M_2 για να κτίσουμε αυτόματο M που να αναγνωρίζει τη γλώσσα $A_1 \cup A_2$.
- Με κάθε σύμβολο που διαβάζουμε πρέπει να γνωρίζουμε σε ποια κατάσταση βρισκόμαστε σε κάθε ένα από τα επιμέρους αυτόματα.
  - Συνεπώς: πρέπει να θυμόμαστε ζεύγη
  - Αν το M_1 έχει k_1 καταστάσεις και το M_2 έχει k_2 καταστάσεις, το M πρέπει να έχει $k_1 \cdot k_2$ καταστάσεις.

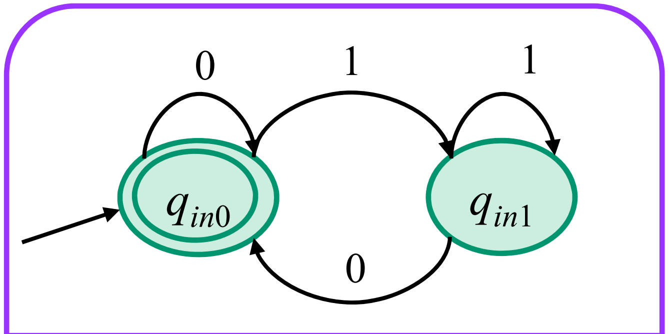
Παράδειγμα (1)

- Έστω οι γλώσσες
  - A_1={w | η λέξη w τελειώνει σε 0 ή έχει μήκος 0}
  - A_2={w | η λέξη w έχει άρτιο μήκος}
  - $A_1 \cup A_2$: όλες οι λέξεις που είτε έχουν άρτιο μήκος είτε τελειώνουν σε 0

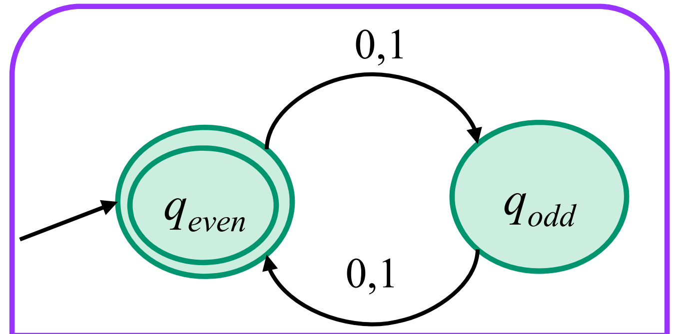




Παράδειγμα (2)



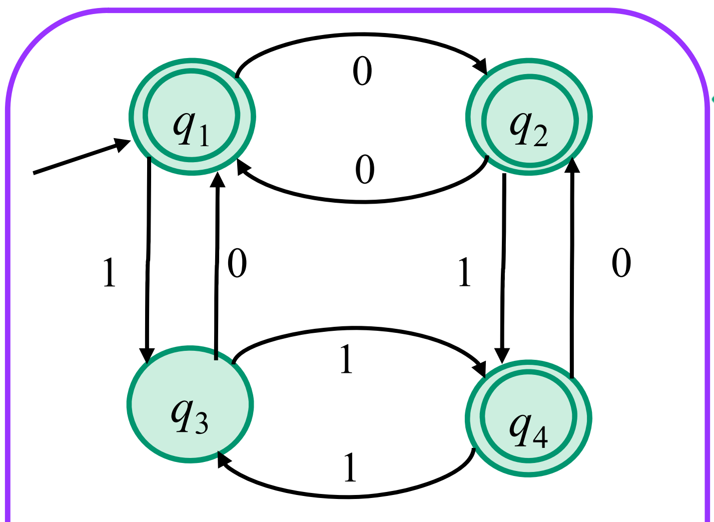
Αυτόματο M_1



Αυτόματο M_2

Λέξεις που τελειώνουν σε 0 και έχουν άρτιο μήκος

Λέξεις που τελειώνουν σε 0 και έχουν περιττό μήκος



Αυτόματο M

Λέξεις που τελειώνουν σε 1 και έχουν περιττό μήκος

Λέξεις που τελειώνουν σε 1 και έχουν άρτιο μήκος

Απόδειξη κλειστότητας ως προς την ένωση

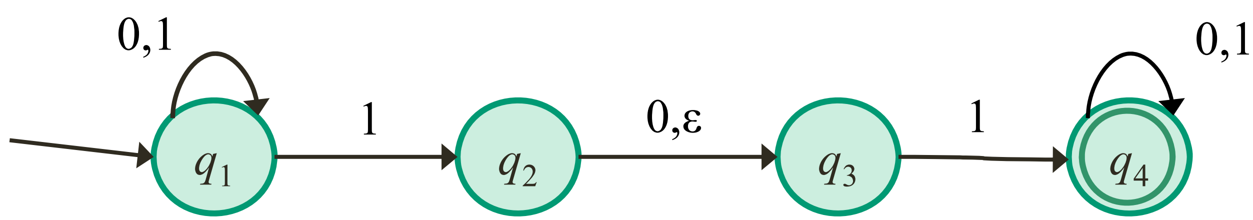
- Κατασκευαστική
- Έστω $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.
- Κατασκευάζουμε το $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:
  - $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
  - Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των M_1 και M_2.
  - Για κάθε $(r_1, r_2) \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε
    $$\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - $F = \{(r_1, r_2) \in Q \mid r_1 \in F_1 \text{ ή } r_2 \in F_2\}$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ:
  - $w \in L(M)$ αν και μόνο αν $w \in L(M_1) \cup L(M_2)$ (Δείξτε το!)

Ανταιτιοκρατία

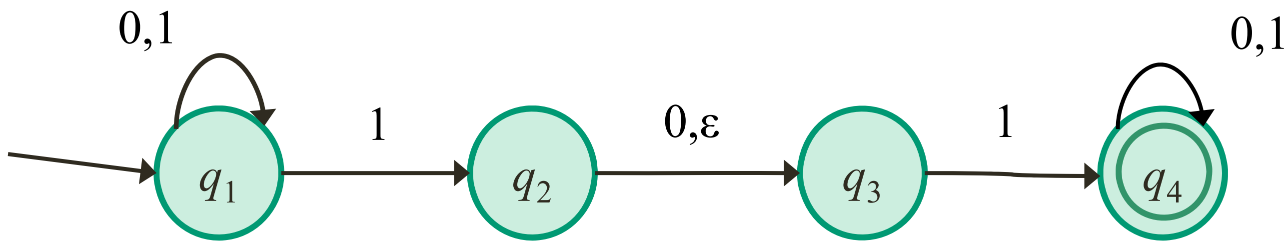
- *Αιτιοκρατία:* από κάθε κατάσταση, για κάθε σύμβολο η επόμενη κατάσταση είναι καθορισμένη και μοναδική.
- *Ανταιτιοκρατία:* γενίκευση της αιτιοκρατίας
  - Ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες από μια επιλογές για την επόμενη κατάσταση.

Ανταιτιοκρατικά αυτόματα, μη ντετερμινιστικά αυτόματα, nondeterministic automata, NFA



- Διαφορές από DFA
  - Από κάθε κατάσταση μπορούν να εκκινούν μηδέν, ένα, ή περισσότερα βέλη για κάθε σύμβολο του αλφαβήτου
  - Προσθέτει το σύμβολο ε στο αλφάβητο.

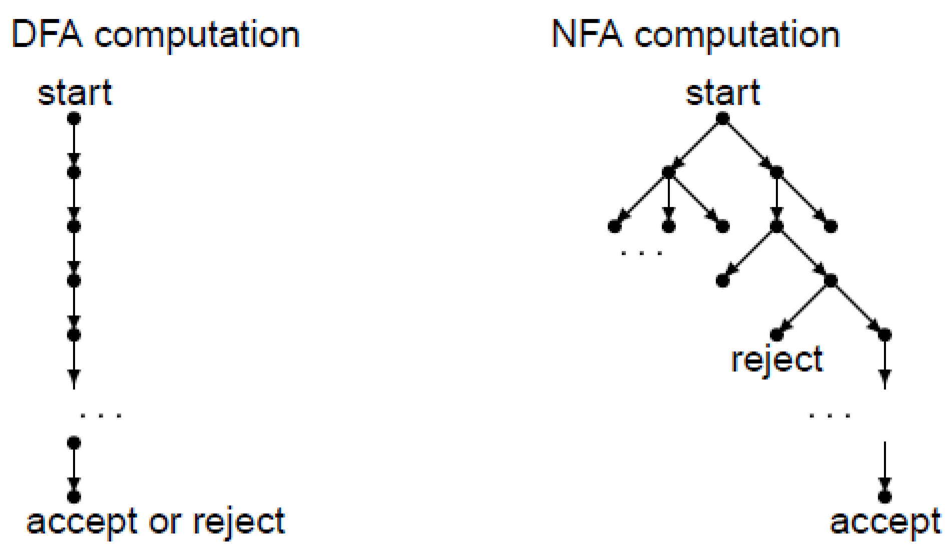
Πως υπολογίζει ένα NFA;



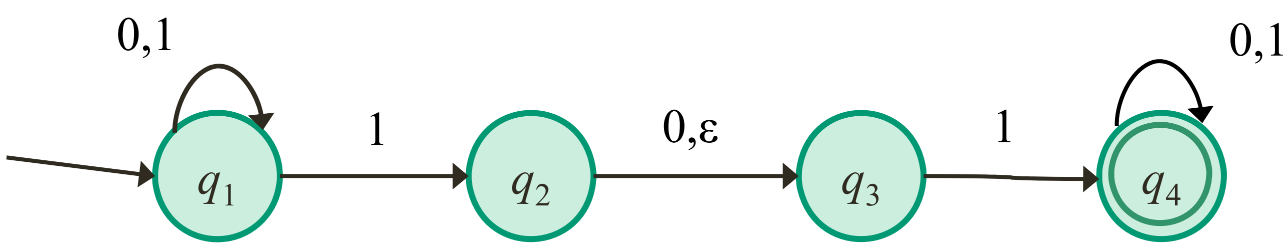
- Έστω βρισκόμαστε στην q_1 και λαμβάνουμε 1
  - Το αυτόματο διασπάται σε πολλαπλά αντίγραφα του εαυτού του και ακολουθεί όλες τις δυνατότητες παράλληλα.
  - Αν σε κάποιο αντίγραφο το επόμενο σύμβολο εισόδου δεν εμφανίζεται σε κανένα από τα βέλη τότε το αντίγραφο «σβήνει».
  - Το αυτόματο τερματίζει αν στο τέλος της ανάγνωσης της εισόδου υπάρχει έστω και ένα αντίγραφο που οδηγεί σε κατάσταση αποδοχής.
- Τι γίνεται όταν σε κάποια κατάσταση ξεκινά μονοπάτι με το σύμβολο ε;
  - Χωρίς να διαβάσει κανένα σύμβολο της λέξης εισόδου, το αυτόματο διασπάται σε αντίγραφα, το ένα παραμένει στην τρέχουσα κατάσταση και τα υπόλοιπα ακολουθούν τα εξερχόμενα βέλη με επιγραφή «ε».

Δέντρο Υπολογισμού

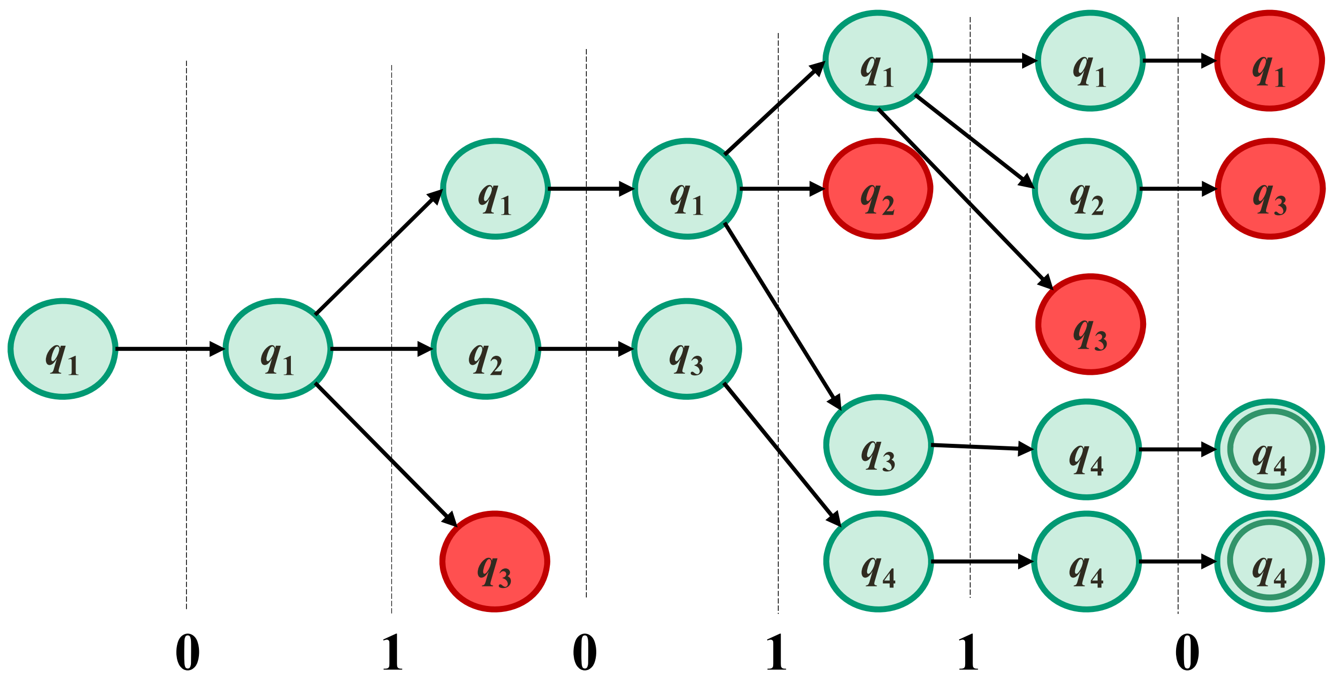
- Ένα NFA μπορεί να τύχει ερμηνείας ως ένα *δένδρο δυνατοτήτων*:
  - Η ρίζα του δέντρου αντιστοιχεί στην αρχή του υπολογισμού.
  - Κάθε σημείο διακλάδωσης αντιστοιχεί σε ένα σημείο του υπολογισμού στο οποίο το αυτόματο έχει πολλαπλές επιλογές.
  - Το αυτόματο αποδέχεται αν έστω και ένα από τα μονοπάτια αυτού του δένδρου καταλήγει σε κατάσταση αποδοχής.



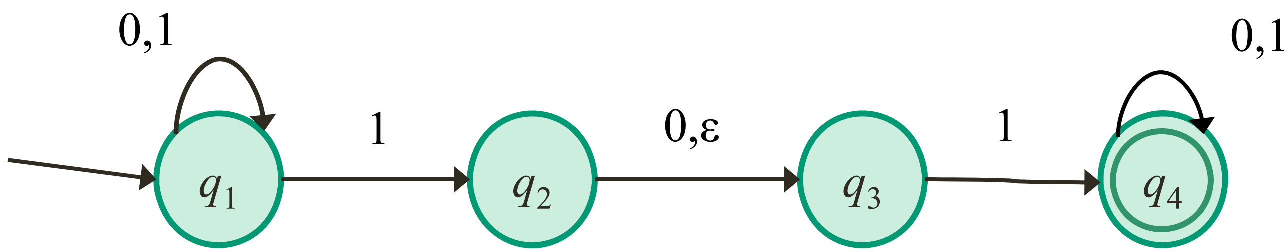
Παράδειγμα



- Πως προχωρά ο υπολογισμός πάνω στη λέξη 010110



Παράδειγμα



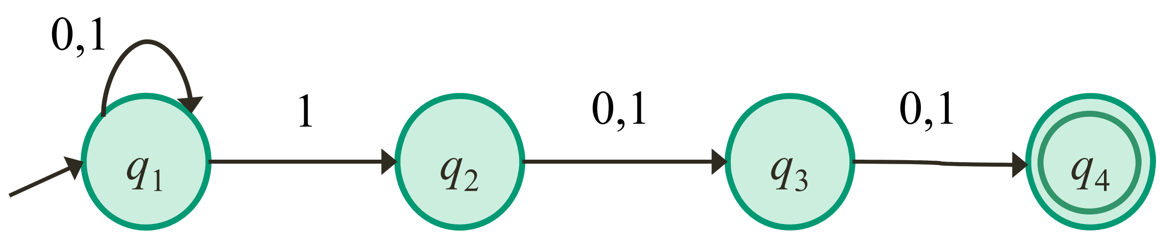
- Ποια γλώσσα αναγνωρίζει το αυτόματο;
  - Τη γλώσσα με όλες τις λέξεις που έχουν ως υπολέξη το 101 ή το 11

Χρησιμότητα NFA

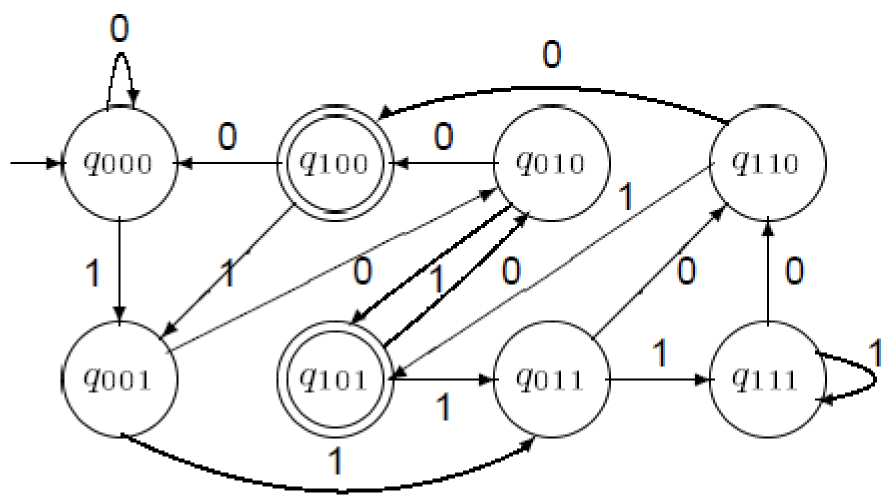
- Κάθε NFA μπορεί να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο ισοδύναμο DFA
- Τα NFA είναι συνήθως μικρότερα
- Η λειτουργία ενός NFA είναι ευκολότερα κατανοητή
- Η κατασκευή ενός NFA είναι ευκολότερη

Παράδειγμα

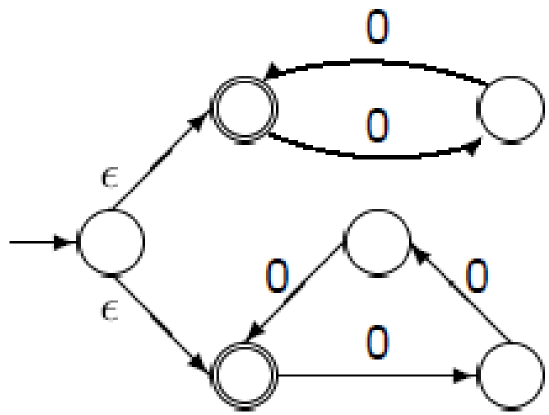
- A = {*w* | *w* περιέχει το σύμβολο 1 στην τρίτη θέση από το τέλος}
  - 00100 ανήκει στην A
  - 011 δεν ανήκει



- Ποιο είναι το αντίστοιχο ντετερμινιστικό;



Χρήση «ε»-μεταβάσεων



- Το αυτόματο αποδέχεται όλες τις λέξεις 0^k όπου το k μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος ο οποίος είναι είτε πολλαπλάσιο του 2 είτε πολλαπλάσιο του 3.

NFA – Ορισμός

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Μη ντετερμινιστικό, πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, όπου

1. Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται *καταστάσεις*,
2. Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται *αλφάβητο*,
3. $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow P(Q)$, είναι η *συνάρτηση μεταβάσεων*,
4. $q_0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση* (αρχική κατάσταση),
5. $F \subseteq Q$ είναι το *σύνολο των καταστάσεων αποδοχής* (τελικές καταστάσεις).

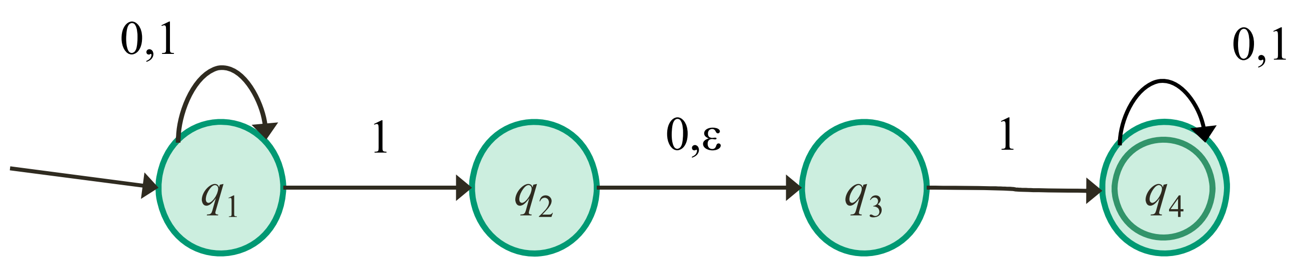
Συμβολισμός: $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Παρατήρηση: Κάθε DFA είναι και NFA!

Παράδειγμα NFA

- $N_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, όπου
  - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
  - $\Sigma = \{0,1\}$
  - δ η συνάρτηση μεταβάσεων όπως περιγράφεται στον πίνακα
  - εναρκτήρια κατάσταση είναι η q_1
  - και $F = \{q_4\}$

	0	**1**	**ε**
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\varnothing$
q_2	$\{q_3\}$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\varnothing$	$\{q_4\}$	$\varnothing$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\varnothing$



Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *αποδέχεται* μια λέξη w αν αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = y_1 y_2 \ldots y_m$ όπου $y_i \in \Sigma_\varepsilon$ αν υπάρχει ακολουθία καταστάσεων του $r_0, r_1, \ldots, r_m$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες:
  - $r_0 = q_0$
  - $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$,για $i = 0,\ldots,m - 1$, και
  - $r_m \in F$

- Το αυτόματο Ν *αναγνωρίζει* τη γλώσσα Α αν:

$$A = \{w \mid \text{το N αποδέχεται την } w\}$$

Ισοδυναμία NFA με DFA

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Για κάθε μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο υπάρχει ισοδύναμο ντετερμινιστικό.

- Ιδέα απόδειξης
  - Πρέπει να δείξουμε ότι αν μια γλώσσα αναγνωρίζεται από κάποιο μη ντετερμινιστικό αυτόματο, υπάρχει ντετερμινιστικό αυτόματο που την αναγνωρίζει.
  - Κατασκευή ενός ντετερμινιστικού αυτόματου που να προσομοιώνει το μη ντετερμινιστικό
- Υπόδειξη: Κάθε σύμβολο στο NFA μας οδηγεί σε ένα σύνολο καταστάσεων
  - Αυτό το σύνολο πρέπει να αντιπροσωπεύει μια κατάσταση του ντετερμινιστικού αυτομάτου.
  - Άρα οι καταστάσεις του DFA θα περιέχουν όλα τα δυνατά υποσύνολα των καταστάσεων του NFA

Απόδειξη Θεωρήματος

- Κατασκευαστική
- Έστω το NFA N = $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Κατ' αρχή, ας υποθέσουμε ότι το N δεν περιέχει μεταβάσεις «ε».
- Κατασκευάζουμε το M = $(Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ ως εξής:
  - Q' = (το δυναμοσύνολο του Q)
  - Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό του N
  - Για κάθε $R \in Q'$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε

$$\delta'(R, a) = \{q \in Q \mid q \in \delta(r, a) \text{ για κάποιο } r \in R\}$$

  - $q_0' = \{q_0\}$
  - $F' = \{R' \in Q \mid$ το R' περιέχει κάποια κατάσταση αποδοχής του N$\}$

Ισοδυναμία NFA με DFA (Απόδειξη)

- Μετατροπή μεταβάσεων ε:
  - $E(R)$ = { q | η q είναι προσπελάσιμη από το R μέσω μηδέν ή περισσοτέρων μεταβάσεων «ε»}
  - $\delta'(R,a) = \{q \in Q | q \in E(\delta(r,a)) \text{ for some } r \in R\}$
  - $q_0' = E(\{q_0\})$

- Ορθότητα Κατασκευής: Σε κάθε βήμα του υπολογισμού του Μ επί κάποιας εισόδου, το Μ βρίσκεται σε μια κατάσταση που αντιστοιχεί στο σύνολο των καταστάσεων που θα μπορούσε να βρίσκεται το Ν στο σημείο εκείνο.
- Μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ:
  - $w \in$ L(M) αν και μόνο αν $w \in$ L(N)   (Δείξτε το!)

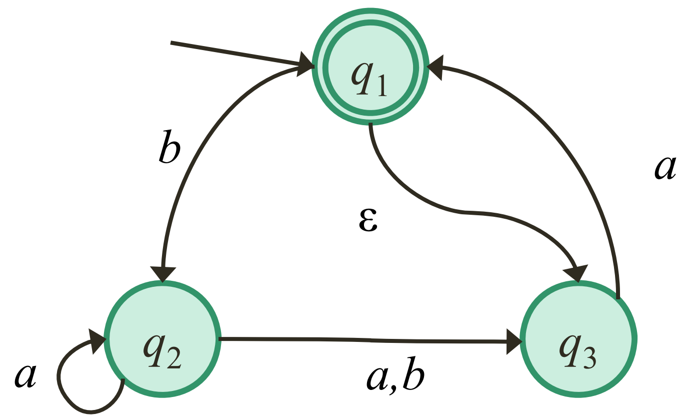
NFA και Κανονικές Γλώσσες

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Μια γλώσσα είναι κανονική αν και μόνο αν υπάρχει μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει.

Παράδειγμα: NFA to DFA

- Ποιο είναι το DFA που αντιστοιχεί στο πιο κάτω NFA;



- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - $= \{\varnothing , \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $q_0 = \mathrm{E}(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\}$
  - $F = \{\{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$
  - $\delta = \ldots$

Πράξεις σε Κανονικές Γλώσσες

Έστω δυο γλώσσες A και B:

- **Ένωση**: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ or } x \in B\}$
- **Συναρμογή (Σύμπτυξη)**: $AB = \{xy | x \in A \text{ and } y \in B\}$
- **Σώρευση**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | k \geq 0 \text{ and } \forall x_i, x_i \in A\}$

Κλειστότητα ως προς την ένωση

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

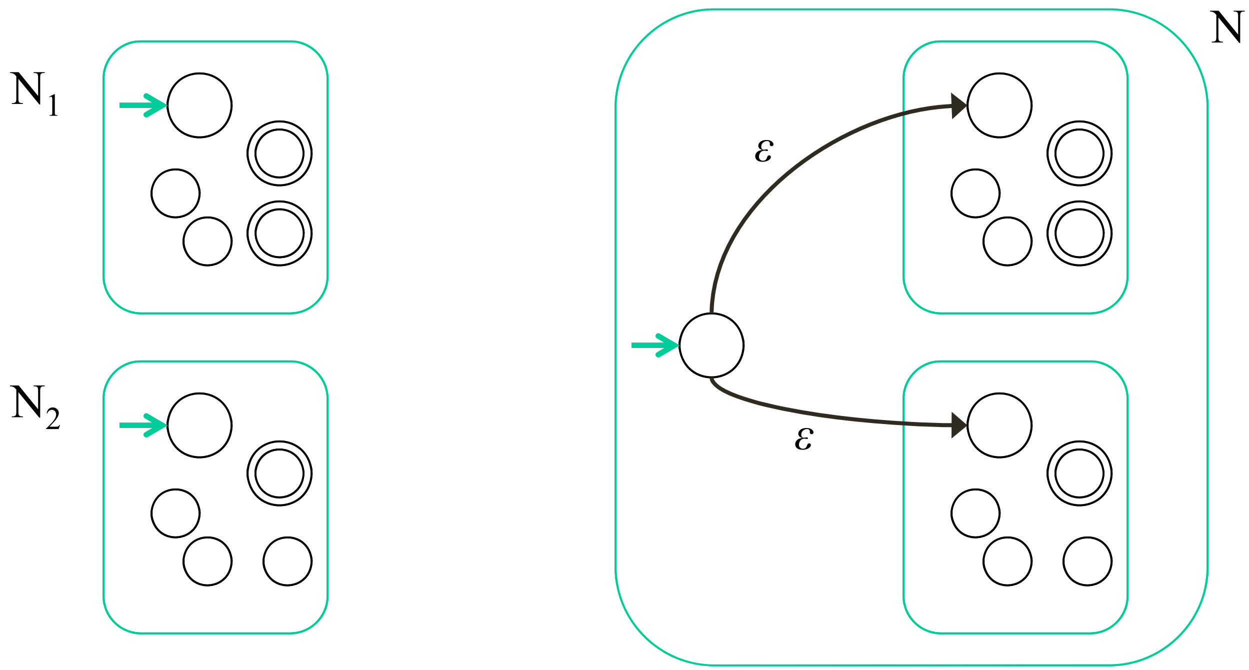
Το σύνολο των κανονικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς την ένωση.

- Το θεώρημα αυτό έχει ήδη αποδειχθεί χρησιμοποιώντας πεπερασμένα ντετερμινιστικά αυτόματα (διαφάνεια 2-24).
- Θα δούμε τώρα μια απλουστευμένη απόδειξη χρησιμοποιώντας μη-ντετερμινιστικά αυτόματα.
- Η απόδειξη είναι και πάλι κατασκευαστική.
- Βασική Ιδέα: Αφού οι A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε υπάρχουν μη ντετερμινιστικά αυτόματα N_1 και N_2 που τις αναγνωρίζουν. Συνδυάζουμε τα N_1 και N_2 για να κτίσουμε αυτόματο N που να αναγνωρίζει τη γλώσσα $A_1 \cup A_2$.

Απόδειξη κλειστότητας ως προς την ένωση

- Έστω N_1 και N_2 μη ντετερμινιστικά αυτόματα που αναγνωρίζουν τις γλώσσες A_1 και A_2 αντίστοιχα.

- Κτίζουμε το N ως εξής:
  - Εισάγουμε μια καινούρια αρχική κατάσταση η οποία διακλαδώνεται προς τις αρχικές καταστάσεις των μηχανών N_1 και N_2 μέσω μεταβάσεων *ε*.



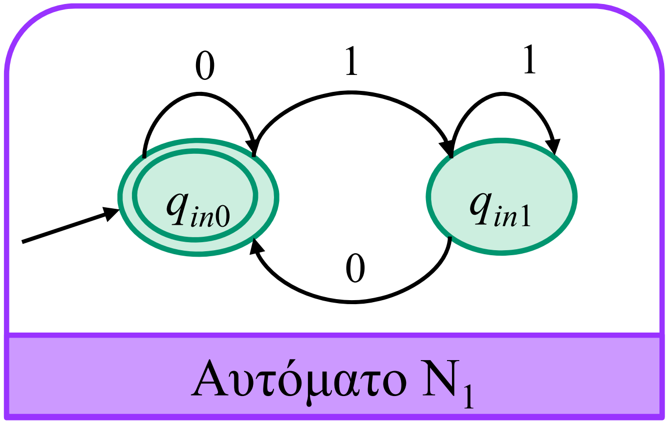
Απόδειξη κλειστότητας ως προς την ένωση

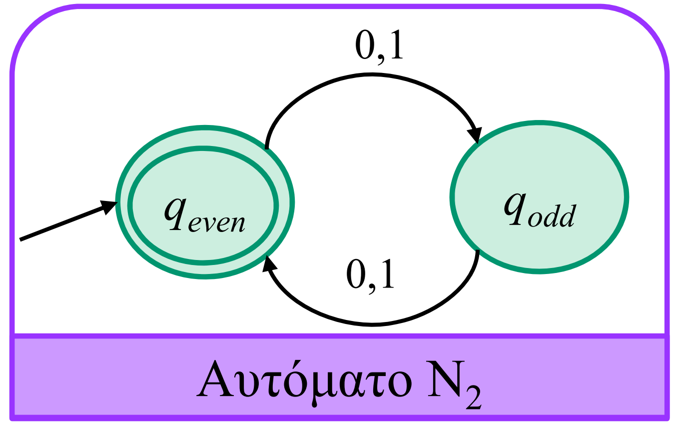
- Έστω $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.
- Κατασκευάζουμε το $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:
  - $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
  - Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των N_1 και N_2.
  - Για κάθε $q \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε

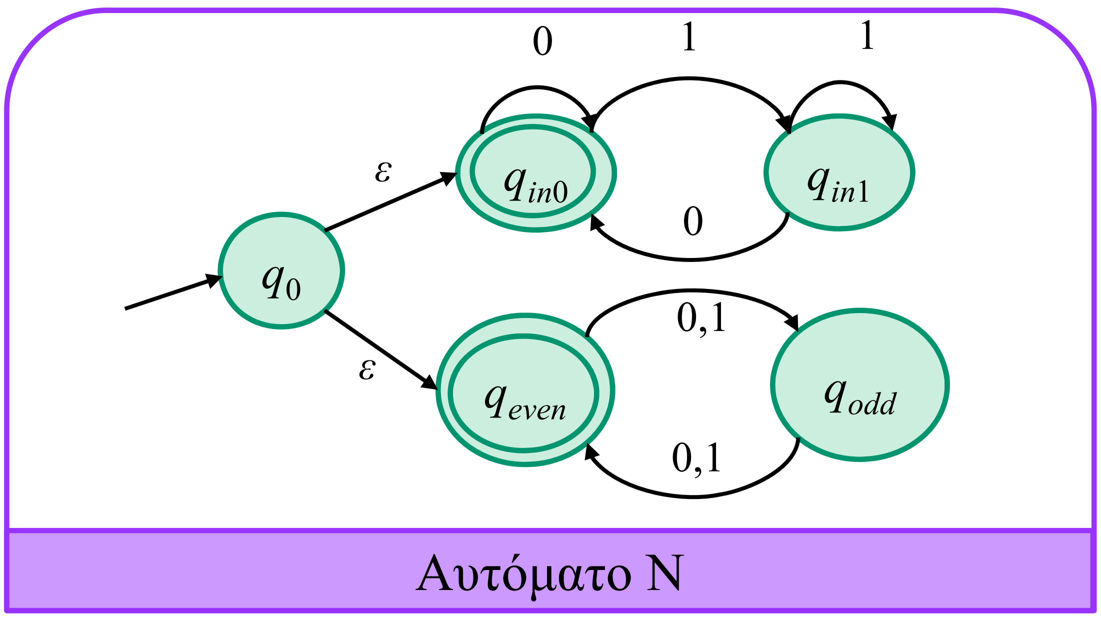
$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{if } q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{if } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{if } q = q_0 \text{ and } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{if } q = q_0 \text{ and } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

  - Αρχική κατάσταση είναι η καινούρια κατάσταση q_0
  - $F = F_1 \cup F_2$
- Μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ:
  - $w \in L(N)$ αν και μόνο αν $w \in L(N_1) \cup L(N_2)$ (δείξτε το!)

Παράδειγμα


0
1
1
q_{in0}
q_{in1}
0
Αυτόματο N_1


0,1
q_{even}
q_{odd}
0,1
Αυτόματο N_2


0
1
1
ε
q_{in0}
q_{in1}
0
q_0
0,1
ε
q_{even}
q_{odd}
0,1
Αυτόματο N

Κλειστότητα ως προς τη συναρμογή

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Το σύνολο των κανονικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς τη συναρμογή.

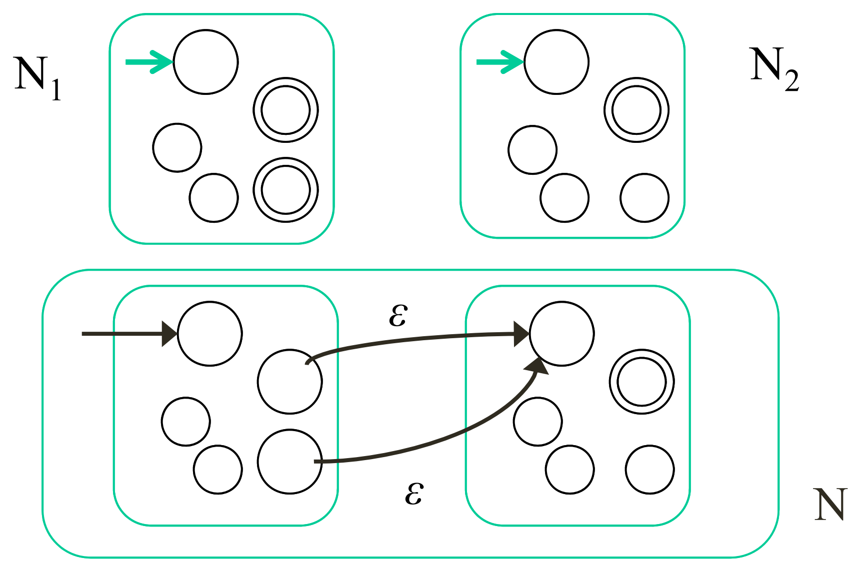
- Δηλαδή: Αν οι γλώσσες A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε το ίδιο ισχύει για την γλώσσα A_1A_2.

- Κατασκευαστική απόδειξη

- Βασική Ιδέα: Αφού οι A_1 και A_2 είναι κανονικές γλώσσες τότε υπάρχουν μη ντετερμινιστικά αυτόματα N_1 και N_2 που τις αναγνωρίζουν. Συνδυάζουμε τα N_1 και N_2 για να κτίσουμε αυτόματο N που να αναγνωρίζει τη γλώσσα A_1A_2.

Κλειστότητα ως προς τη συναρμογή

- Έστω N_1 και N_2 μη ντετερμινιστικά αυτόματα που αναγνωρίζουν τις γλώσσες A_1 και A_2 αντίστοιχα.
- Κτίζουμε το N ως εξής:
  - Επιλέγουμε ως αρχική κατάσταση την αρχική κατάσταση του N_1 και ως τελικές καταστάσεις τις τελικές καταστάσεις του N_2.
  - Οι τελικές καταστάσεις του N_1 συνδέονται μέσω ε μεταβάσεων με τις αρχικές καταστάσεις του N_2.



Κλειστότητα ως προς τη συναρμογή

- Έστω $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.
- Κατασκευάζουμε το $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:
  - $Q = Q_1 \cup Q_2$
  - Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των N_1 και N_2.
  - Για κάθε $q \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{if } q \in Q_1 \text{ and } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{if } q \in F_1 \text{ and } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & \text{if } q \in F_1 \text{ and } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & \text{if } q \in Q_2 \end{cases}$$

  - $q_0 = q_1$
  - $F = F_2$
- Μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ:
  - $w \in L(N)$ αν και μόνο αν $w \in L(N_1)L(N_2)$ (δείξτε το!)

Κλειστότητα ως προς τη σώρευση

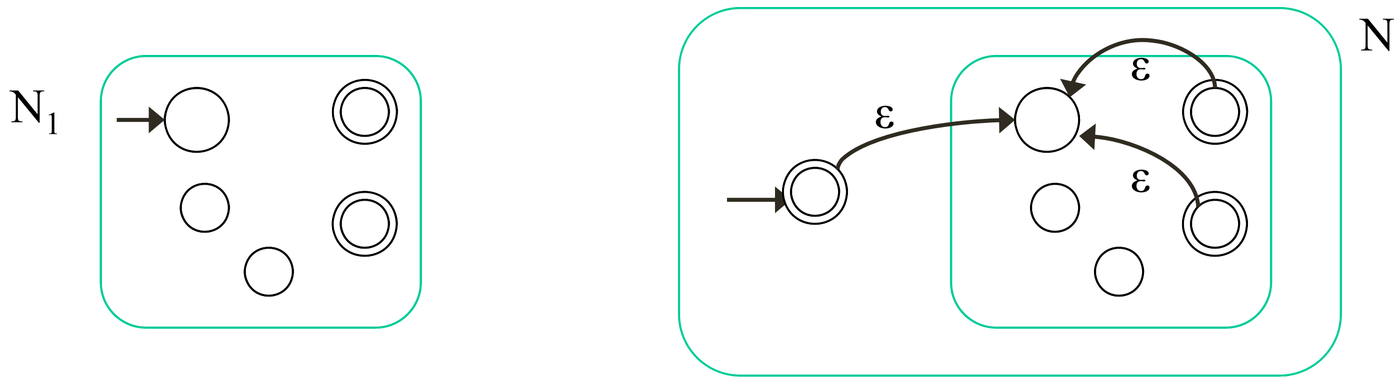
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το σύνολο των κανονικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς τη σώρευση.

- Δηλαδή: Αν η γλώσσα Α είναι κανονική γλώσσα τότε το ίδιο ισχύει για τη γλώσσα Α*.
- Κατασκευαστική απόδειξη
- Βασική Ιδέα: Αφού η Α είναι κανονική γλώσσα τότε υπάρχει μη ντετερμινιστικό αυτόματο N_1 που την αναγνωρίζει. Επεξεργαζόμαστε το N_1 για να κτίσουμε αυτόματο Ν που αναγνωρίζει τη γλώσσα Α*.

Κλειστότητα ως προς τη σώρευση

- Έστω N_1 μη ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα A.
- Κτίζουμε το N ως εξής:
  - Εισάγουμε μια νέα αρχική κατάσταση η οποία είναι και τελική (0 επαναλήψεις των λέξεων του A).
  - Συνδέουμε την κατάσταση αυτή μέσω μιας ε μετάβασης με την αρχική κατάσταση του N_1.
  - Οι τελικές καταστάσεις του N_1 συνδέονται μέσω ε μεταβάσεων με τις αρχικές καταστάσεις του N_1.



Κλειστότητα ως προς τη σώρευση

- Έστω $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$.
- Κατασκευάζουμε το $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:
  - $Q = \{q_0\} \cup Q_1$
  - Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό του N_1.
  - Για κάθε $q \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{if } q \in Q_1 \text{ and } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{if } q \in F_1 \text{ and } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & \text{if } q \in F_1 \text{ and } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{if } q = q_0 \text{ and } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{if } q = q_0 \text{ and } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

  - Αρχική κατάσταση είναι η q_0.
  - $F = \{q_0\} \cup F_1$
- Μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ: $w \in L(N)$ αν και μόνο αν $w \in L(N_1)^*$.   (δείξτε το!)