Θεωρία Υπολογισμού

Μαθηματικό Υπόβαθρο (Κεφάλαιο 0, Sipser)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Σύνολα

Συναρτήσεις και Σχέσεις

Γραφήματα

Λέξεις και Γλώσσες

Αποδείξεις

Ανασκόπηση Μαθηματικών Ορισμών

- Σύνολο
  - Μια ομάδα αντικείμενων
  - Τα αντικείμενα αυτά τα ονομάζουμε *στοιχεία* του συνόλου
  - π.χ. {True, False}, {1,4,5}, {α,ω}, {{1,2}, {2,4},{3,6}}

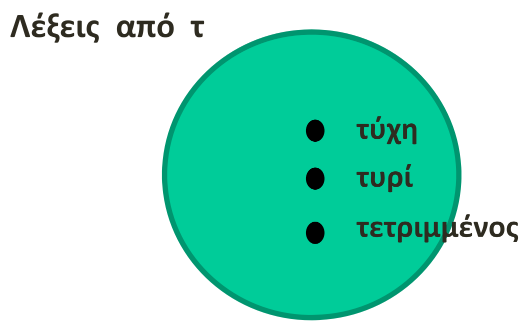
- Η σειριακή διάταξη των στοιχείων ενός συνόλου δεν έχει σημασία.
  - {1,2,3} = {3,2,1}

- Ο αριθμός επαναλήψεων των στοιχείων ενός συνόλου δεν έχει σημασία.
  - {1,2,2,3,3,3} = {1,1,2,3}

- Πλήθος είναι ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου. Γράφουμε |Α| για το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α.
  - |{1,2,3}| = 3
  - | {1,2,2,3,3,3} | = 3

Αναπαράσταση Συνόλων

- Ένα σύνολο μπορεί να αναπαρασταθεί
  - Συστηματικά:
    - B={3, 13, 25}
  - Κατηγορηματικά: Μέσω κανόνων που χαρακτηρίζουν τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο
    - Γ ={x | x είναι άρτιος αριθμός μικρότερος από το 9 και μεγαλύτερος από το 3}
  - Διαγραμματικά: Διάγραμμα Venn



- Σύμβολα
  - $\in$ - ανήκει, π.χ. $1 \in \{1,4\}$
  - $\notin$ - δεν ανήκει $2 \notin \{1,4\}$

Σχέσεις συνόλων

- Το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β, $A \subseteq B$, αν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.
  (Α εγκλείεται στο Β)
  - Μαθηματικά: $A \subseteq B$: $\forall x \in A,\ x \in B$

- Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ τότε λέμε ότι το Α είναι γνήσιο υποσύνολο του Β και γράφουμε $A \subset B$.

- Ιδιότητες Εγκλεισμού:
  - Ανακλαστική: $A \subseteq A$
  - Αντισυμμετρική: Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, $\Rightarrow A = B$
  - Μεταβατική: Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, $\Rightarrow A \subseteq \Gamma$

- Τα σύνολα Α και Β είναι συγκρίσιμα αν είτε $A \subseteq B$ είτε $B \subseteq A$

Ειδικοί τύποι συνόλων

- Κενό Σύνολο {} ή $\varnothing$: Το σύνολο χωρίς στοιχεία.

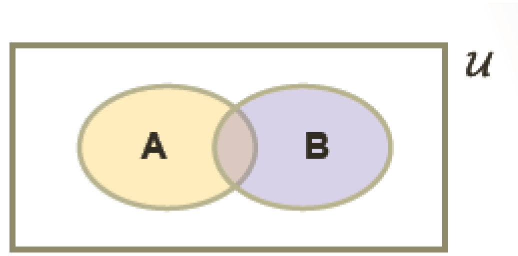
- «Σύμπαν» U: Το σύνολο που περιέχει όλα τα υπό μελέτη αντικείμενα.

- Δυναμοσύνολο ενός συνόλου Α, $\mathcal{P}(A)$ περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του Α
  - $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
  - Παράδειγμα: Για $A = \{1,2,3\}$

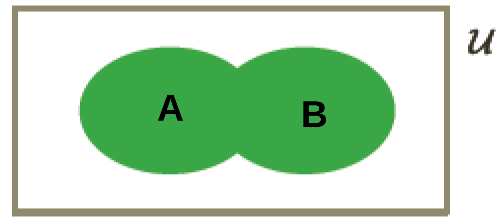
    $\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Πράξεις συνόλων (1)

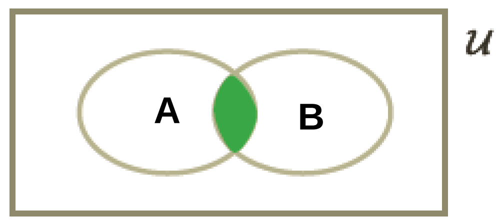
- Έστω τα σύνολα A, B.



- Ένωση: A∪B ={x | x ∈ A ή x ∈ B}

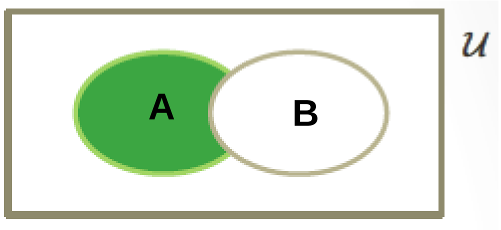


- Τομή: A∩B ={x | x ∈ A και x ∈ B}

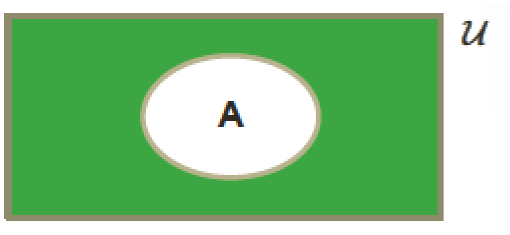


Πράξεις συνόλων (2)

- Αφαίρεση: A\B ={x | x ∈A και x ∉ B}



- Συμπλήρωμα: Ā={x | x ∉ A}



Ιδιότητες Πράξεων (1)

- Νόμος Αντιμετάθεσης
  - $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$
- Νόμος Προσεταιρισμού
  - $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ και $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
- Νόμοι Επιμερισμού
  - Ένωσης προς την τομή: $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
  - Τομής προς την ένωση: $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
- Τα σύνολα A και B είναι ξένα σύνολα αν $A \cap B = \varnothing$,

Ιδιότητες Πράξεων (2)

- Πρώτος νόμος De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Δεύτερος νόμος De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Μηδενοδυναμία του συμπληρώματος: $\overline{\overline{A}} = A$
- Κενό σύνολο
  - $\overline{A} \cap \mathrm{A} = \varnothing$
  - $\mathrm{A} \cap \varnothing = \varnothing$, $\mathrm{A} \cup \varnothing = \mathrm{A}$
- Σύμπαν
  - $\mathrm{A} \cap U = \mathrm{A}$
  - $\mathrm{A} \cup U = U$

Σημαντικά Σύνολα

- Σύνολο ακεραίων αριθμών: $\mathcal{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
  - Θετικοί ακέραιοι:
  - Αρνητικοί ακέραιοι:

- Σύνολο φυσικών αριθμών: $\mathcal{N} = \{1,2,3\ldots\}$

- Σύνολο πραγματικών αριθμών: $\mathcal{R}$

Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα

- Ένα σύνολο Α καλείται πεπερασμένο αν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το Α να είναι ισοπληθές με το σύνολο $\{1,\ldots,n\}$.
- Ένα σύνολο είναι απείρως αριθμήσιμο αν αυτό είναι ισοπληθές με το σύνολο των φυσικών αριθμών.
- Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο αν αυτό είναι απείρως αριθμήσιμο ή πεπερασμένο.
- Ένα σύνολο καλείται άπειρο αν αυτό δεν είναι πεπερασμένο.

Καρτεσιανό Γινόμενο (1)

- Ακολουθία
  - Κατάλογος αντικειμένων με καθορισμένη σειρά
  - Παράδειγμα: (3,6,9)
  - Προσοχή: (3, 6, 9) $\neq$ (3,9,6), (3,6,6,9) $\neq$ (3,6,9)
- Ακολουθία με k αντικείμενα λέγεται k-άδα.
  - Ακολουθία με 2 αντικείμενα λέγεται δυάδα ή ζεύγος
- Καρτεσιανό Γινόμενο
  - Δοθέντων δύο συνόλων A και B καρτεσιανό γινόμενο A×B ονομάζουμε το σύνολο όλων των ζευγών που έχουν ως πρώτο μέλος τους στοιχείο από το σύνολο A και ως δεύτερο μέλος τους στοιχείο από το σύνολο B, δηλαδή

    $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ και } b \in B\}$
- Αν το σύνολο A έχει n στοιχεία και το σύνολο B έχει m στοιχεία, τότε τα σύνολα A×B και B×A έχουν $n \cdot m$ στοιχεία.

Καρτεσιανό Γινόμενο (2)

- Παράδειγμα
  - Εάν A = {1, 2} και B = { x, y, z}

    A×B={(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)}

- Συντομογραφία

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{k φορές}} = A^k$$

- Όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών γράφονται

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N} = \{(i,j) | i,j \geq 1\}$$

Ασκήσεις

- Αποδείξτε τις πιο κάτω προτάσεις:

  Αν είναι $B \subsetneq A$ και $B \subsetneq \overline{A}$, τότε $B = \emptyset$

  $$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

  $$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Συναρτήσεις (1)

- Συνάρτηση
  - Ένα αντικείμενο που ορίζει ένα συσχετισμό μεταξύ ενός συνόλου «εισόδων» και ενός συνόλου «εξόδων»
- Δέχεται μια είσοδο και παράγει μια έξοδο: $f(a) = b$
- Γράφουμε $f : \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{R}$ για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f έχει
  - ως σύνολο δυνατών εισόδων το D (πεδίο ορισμού) και
  - ως σύνολο δυνατών εξόδων το R (πεδίο τιμών).
- Παραδείγματα:
  - *Απόλυτο*, $| \_ | : Z \rightarrow Z$
    - $|-2| = 2$, $|64| = 64$
  - *Πρόσθεση*, $+ : Z \times Z \rightarrow Z$
    - $+(2,48) = 50$ (ή $2 + 48 = 50$)

Συναρτήσεις (2)

- Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $A_1 \times \ldots \times A_k$, τότε κάθε είσοδος της συνάρτησης είναι μια k-άδα $(a_1,\ldots,a_k)$, όπου για κάθε i, $a_i \in A_i$ είναι οι παράμετροι της συνάρτησης.

- Μία συνάρτηση ονομάζεται διπαραμετρική, αν οι είσοδοι της είναι ζεύγη.

- Αναπαράσταση διπαραμετρικών συναρτήσεων:
  – Ενδοθεματική, π.χ. α + β
  – Προθεματική, π.χ. +(α,β)

Σχέσεις

- Κατηγόρημα ή ιδιότητα: Οποιαδήποτε συνάρτηση έχει ως πεδίο τιμών το σύνολο {True, False}.

- Σχέση: Κάθε ιδιότητα R με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *k*-άδων A × . . . × A λέγεται *k* -μελής σχέση στο A

- Παράδειγμα: Η σχέση

  Κερδίζει: $\{\text{ΠΕΤΡΑ, ΨΑΛΙΔΙ, ΧΑΡΤΙ}\}^2 \rightarrow \{\text{True, False}\}$

  μπορεί να οριστεί ως την πιο κάτω διμελή ιδιότητα.

Κερδίζει	**ΠΕΤΡΑ**	**ΨΑΛΙΔΙ**	**ΧΑΡΤΙ**
ΠΕΤΡΑ	False	True	False
ΨΑΛΙΔΙ	False	False	True
ΧΑΡΤΙ	True	False	False

Σχέσεις

- Συμβολισμός: Έστω διμελής σχέση R. Αν $R(a,b)$ = True τότε γράφουμε $a\ R\ b$.

- Έχουμε πει ότι μια k-μελής σχέση είναι μια συνάρτηση. Εναλλακτικά μπορεί να γραφτεί και ως το σύνολο των k-άδων που επαληθεύουν τη σχέση.
  - $(a,b) \in R$ αν και μόνο αν aRb (δηλαδή, αν $R(a,b)$ = True)

- Παράδειγμα: Η σχέση

  Κερδίζει: {ΠΕΤΡΑ, ΨΑΛΙΔΙ, ΧΑΡΤΙ}^{2} → {True, False}

  που ορίσαμε, μπορεί να γραφεί ως εξής:

  {(ΠΕΤΡΑ, ΨΑΛΙΔΙ), (ΨΑΛΙΔΙ, ΧΑΡΤΙ), (ΧΑΡΤΙ,ΠΕΤΡΑ)}

Σχέση Ισοδυναμίας

- Αν R είναι μια διμελής σχέση στο σύνολο Α, τότε η σχέση λέγεται:
  - *ανακλαστική*, αν για κάθε $\alpha \in A$, $\alpha R \alpha$
  - *συμμετρική*, αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$, $\alpha R \beta \Rightarrow \beta R \alpha$
  - *μεταβατική*, αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$, $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Rightarrow \alpha R \gamma$

- Μια σχέση στο σύνολο Α λέγεται *σχέση ισοδυναμίας*, αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- Παράδειγμα
  - Η σχέση στους φυσικούς αριθμούς $\equiv_7$ που ορίζεται ως εξής:

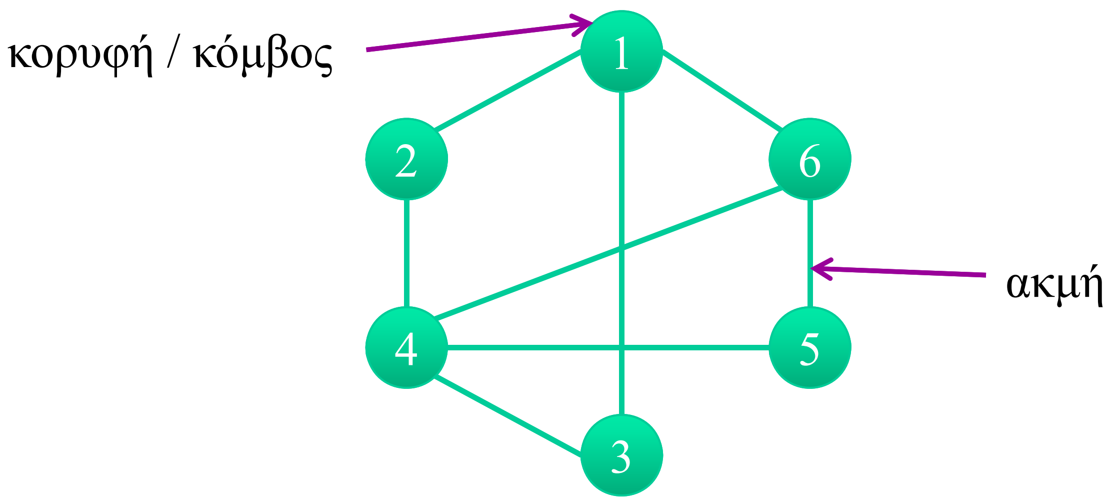
    για κάθε $i, j \in \mathcal{N}$, $i \equiv_7 j$ αν η τιμή $i - j$ είναι πολλαπλάσιο του 7

    είναι σχέση ισοδυναμίας.

Γραφήματα (Γράφοι)

- Ένα γράφημα αποτελείται από
  - ένα σύνολο V *κορυφών* (vertices), ή κόμβων , και
  - ένα σύνολο E *ακμών* (edges). Μια ακμή είναι ένα ζεύγος (u,v) από κορυφές.

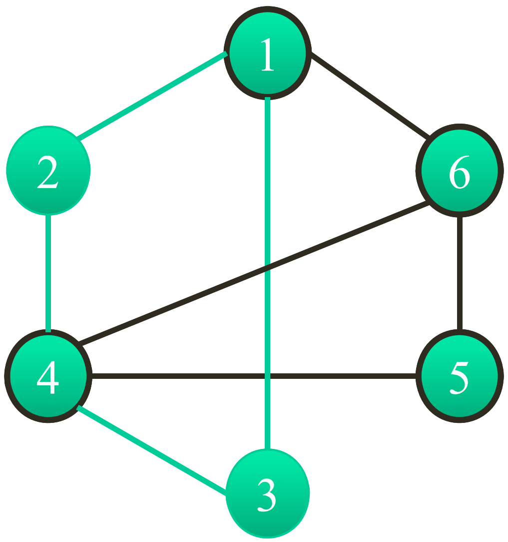
- Παράδειγμα. Το πιο κάτω σχήμα αναπαριστά το γράφημα G = (V,E) με
  - V = {1,2,3,4,5,6} και E={(1,2), (1,3), (1,6),(2,4),(3,4),(4,5),(4,6),(5,6)}



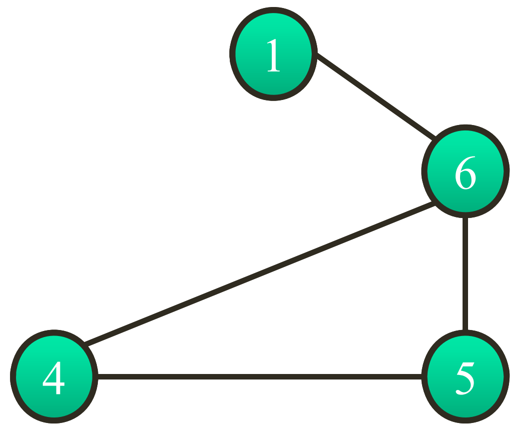
Υπογράφημα

- Έστω G=(V,E) και G΄= (V΄, E΄) γραφήματα, όπου $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Τότε το γράφημα G΄ είναι ***υπογράφημα*** (subgraph) του γραφήματος G.

- Παράδειγμα: Το γράφημα G' είναι υπογράφημα του γραφήματος G.



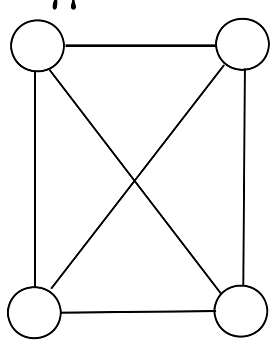
G

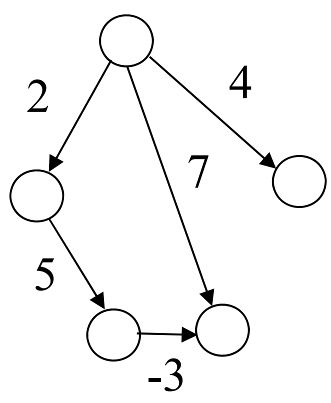


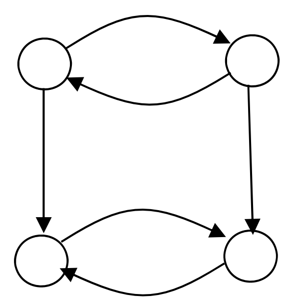
G' = (V', E')
V' = {1,4,5,6}
E'= {(1,6), (4,5), (4,6), (5,6)}

Κατηγορίες Γραφημάτων

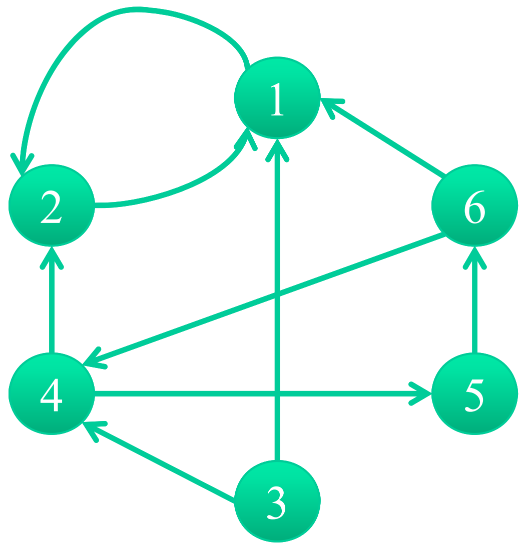
- Ένα γράφημα ονομάζεται **κατευθυνόμενο ή κατευθυντό** (directed graph) αν κάθε μια από τις ακμές του είναι προσανατολισμένη προς μία κατεύθυνση.
- Ένα γράφημα ονομάζεται **μη-κατευθυνόμενο** ή ακατεύθυντο (undirected) αν οι ακμές του δεν είναι προσανατολισμένες.
- Συχνά συσχετίζουμε κάθε ακμή ενός γραφήματος με κάποιο βάρος (weight). Τότε το γράφημα ονομάζεται **γράφημα με βάρη** ή **ενεπίγραφο** γράφημα (weighted graph).
- Παραδείγματα







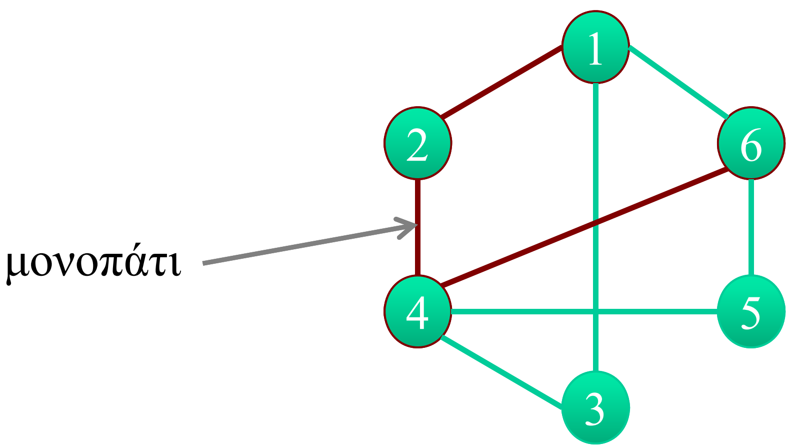
Κατευθυνόμενο γράφημα

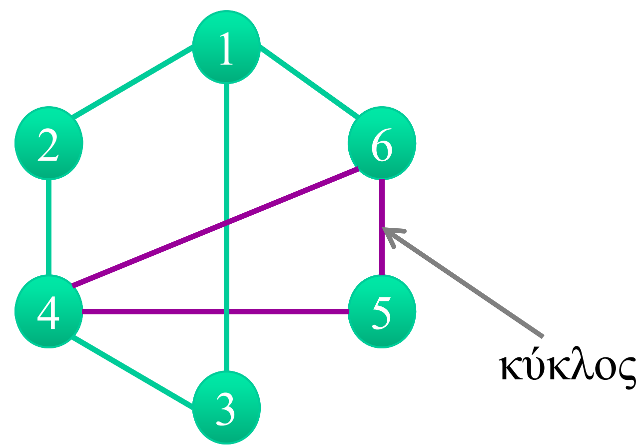


- G = (V,E)
  - V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - E={(1,2), (2,1), (4,2), (4,5), (3,4), (3,1), (5,6), (6,4), (6,1)}
- Στα κατευθυνόμενα γραφήματα η σειρά με την οποία αναφέρονται οι κόμβοι έχει σημασία. Η ακμή (6,1) υπονοεί την ύπαρξη ακμής *από* την κορυφή 6 *προς* την κορυφή 1.

Διαδρομές και Κύκλοι

- **Μονοπάτι** ή **διαδρομή** (path) ενός γραφήματος είναι μια ακολουθία κόμβων $v_0, v_1, \ldots, v_n$, όπου για κάθε i, $0 \le i < n$, (v_i, v_{i+1}) είναι ακμή του γραφήματος
- Μια διαδρομή ενός γραφήματος ονομάζεται **απλή** (simple) αν όλες οι κορυφές της είναι διαφορετικές μεταξύ τους, εκτός από την πρώτη και την τελευταία οι οποίες μπορούν να είναι οι ίδιες.
- ***Κύκλος*** (cycle) ονομάζεται μια διαδρομή με μήκος >1 που ικανοποιεί $v_0 = v_n$.





Συνεκτικότητα

- Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται **συνεκτικό** (connected) αν για κάθε ζευγάρι κορυφών υπάρχει διαδρομή που τις συνδέει.

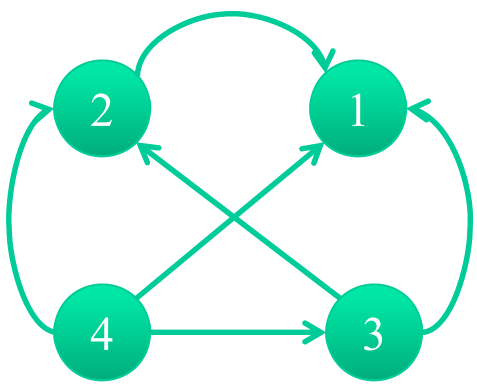
- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα ονομάζεται **ισχυρά συνεκτικό** (strongly connected).

- Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα που δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Αν το μη-κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο αντιστοιχεί είναι συνεκτικό, τότε το γράφημα ονομάζεται ***ασθενώς συνεκτικό*** (weakly connected).

Κατευθυνόμενα Γραφήματα και Σχέσεις

- Τα κατευθυνόμενα γραφήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση διμελών σχέσεων:
  - Μία σχέση $R \subseteq D \times D$ αναπαρίσταται από τον γράφο $G = (D, E)$ όπου $E = \{(x, y) | xRy\}$

- Παράδειγμα
  - A = { 1, 2, 3, 4}
  - R : > *«μεγαλύτερο από»*



Λέξεις και Γλώσσες (1)

- Αλφάβητο Σ: Ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο συμβόλων.

- Παράδειγμα
  - $\Sigma_1 = \{0,1\}$ - δυαδικό αλφάβητο
  - $\Sigma_2 = \{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\chi,\psi,\omega\}$ – ελληνικό αλφάβητο

- Λέξη επί ενός αλφαβήτου:

  Οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου.

- Παραδείγματα λέξεων:
  - `011001` πάνω στο Σ_1
  - `καλημέρα` πάνω στο Σ_2

- Γλώσσα: Οποιοδήποτε σύνολο λέξεων.

Λέξεις και Γλώσσες (2)

- Μήκος λέξης: Πλήθος των συμβόλων που περιέχει |w|

- Κενή λέξη: Λέξη μηδενικού μήκους, ε

- Μια λέξη w μήκους n μπορεί να γραφτεί ως:

$$w = w_1\, w_2 \ldots\, w_n$$

- Η ανάστροφη της λέξης $w = w_1\, w_2 \ldots\, w_n$ συμβολίζεται ως w^R και είναι η λέξη που προκύπτει αν γράψουμε τα σύμβολα της w σε αντίστροφη σειρά. Δηλαδή,

$$w^R = w_n\, w_{n-1} \ldots\, w_1$$

Λέξεις και Γλώσσες (3)

- Η z είναι υπολέξη της λέξης w αν και μόνο αν εμφανίζεται αυτούσια μέσα στην w.
  – Οι λέξεις `καλ`, `λη` και `μερα` είναι υπολέξεις της λέξης `καλημερα`.

- Αν $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ και $y = y_1 y_2 \cdots y_n$, η συναρμογή των λέξεων x και y συμβολίζεται ως xy και είναι η λέξη που προκύπτει αν συνάψουμε τη λέξη y στη λέξη x:

$$xy = x_1 x_2 \cdots x_m \, y_1 y_2 \cdots y_n ,$$

- Για μια λέξη w γράφουμε w^k για τη συναρμογή της λέξης w για k συνεχόμενες φορές.

- Λεξικογραφική διάταξη λέξεων είναι η συνήθης διάταξη που παρατηρείται στα λεξικά.
  – Λεξικογραφική διάταξη όλων των λέξεων επί του αλφαβήτου {0,1}

    {ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, …}

Αποδείξεις

- Ορολογία
  - Ορισμός: περιγράφει με ακρίβεια αντικείμενα και έννοιες
  - Μαθηματικές Προτάσεις: δηλώσεις για τα αντικείμενα υπό μελέτη
  - Απόδειξη: ακολουθία επιχειρημάτων υπέρ της ισχύος μιας πρότασης
  - Θεώρημα: μια μαθηματική πρόταση που έχει αποδειχθεί αληθής
  - Λήμμα: βοηθητικές προτάσεις που έχουν αποδειχθεί αληθείς
  - Πόρισμα: προτάσεις που έπονται από θεωρήματα

- Πως κατασκευάζουμε μια απόδειξη;
  - Κατανόηση της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε
    - Ανάλυση της εκφώνησης
    - Επαλήθευση της πρότασης σε παραδείγματα
  - Αδιέξοδο;
    - Θεωρήστε την πρόταση σε ειδικές περιπτώσεις
    - Αφήστε προσωρινά την απόδειξη και επιστρέψτε αργότερα
  - Υπομονή, συγκέντρωση, τάξη και λακωνικότητα

Είδη αποδείξεων

- Με κατασκευή (κατασκευαστικές)
- Με απαγωγή σε άτοπο (αντίφαση)
- Με επαγωγή

Απόδειξη με κατασκευή

- Εφαρμόζεται όταν η πρότασή μας ισχυρίζεται την ύπαρξη αντικειμένων κάποιου συγκεκριμένου τύπου.
  - Περιγράφουμε πως μπορεί να κατασκευαστεί το αντικείμενο

- Παράδειγμα

  Θεώρημα: Για κάθε άρτιο αριθμό *n* μεγαλύτερο από το 2, υπάρχει 3-κανονικό (κάθε κόμβος έχει βαθμό 3) μη κατευθυνόμενο γράφημα με *n* κόμβους.

  Απόδειξη:

  (Δες Φροντιστήριο 1)

Απαγωγή σε Άτοπο (Αντίφαση)

- Υποθέτουμε ότι η μαθηματική πρόταση δεν ισχύει και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η υπόθεση μας οδηγεί σε εσφαλμένο συμπέρασμα, άτοπο.

- Παράδειγμα

  Θεώρημα: Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

  Απόδειξη:

  (Δες Φροντιστήριο 1)

Επαγωγή

Στόχος

Να αποδειχτεί ότι η (μαθηματική) πρόταση Π(n) ισχύει για κάθε $n \geq 0$.

Μέθοδος

1. Βασική/Εναρκτήρια Περίπτωση: Επαληθεύουμε πως η Π ισχύει για $n = 0$,
2. Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε πως η Π ισχύει για $n = k$ και
3. Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε πως η Π ισχύει για $n = k+1$.

Παραλλαγές

- Αντί του 0, σε ορισμένες περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε για $n \geq a$, όπου το a είναι κάποιος ακέραιος.
- Στο δεύτερο βήμα: Υποθέτουμε πως η Π ισχύει για $n \leq k$ και αποδεικνύουμε πως η Π ισχύει για $n = k+1$.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ για κάθε $n \geq 0$.

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής την πρόταση

$$\Pi(n) \quad \equiv \quad \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad .$$

1. Προφανώς η Π(0) ισχύει αφού $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$.
2. Υποθέτουμε ότι ισχύει η Π(k), δηλαδή ότι $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.
3. Και θα αποδείξουμε ότι ισχύει η Π(k+1):

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ο αριθμός

$$\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$$

είναι πολλαπλάσιο του 7.

Απόδειξη:

(Δες Φροντιστήριο 1)