
Κατηγορηματικός Λογισμός

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Εισαγωγή στον Κατηγορηματικό Λογισμό

Σύνταξη

Κανόνες Συμπερασμού

Σημασιολογία

Κίνητρα

- Υπάρχουν ήδη συλλογισμών που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν μέσω του προτασιακού λογισμού. Για παράδειγμα

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Συμπέρασμα: Ο Σωκράτης είναι θνητός

- Στον προτασιακό συλλογισμό κάθε μια από τις πιο πάνω προτάσεις αποτελεί δήλωση η οποία μπορεί να πάρει ανεξάρτητα από κάθε άλλη τις τιμές T και F.
- Όμως, η ορθότητα του συλλογισμού εξαρτάται από τη δομή των επιμέρους προτάσεων καθώς και από τη σημασία της έκφρασης «όλοι οι άνθρωποι».

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες (1)

- Για τον σκοπό αυτό ο κατηγορηματικός λογισμός εισάγει την έννοια του **κατηγορήματος** της μορφής $K(x)$ που μας λέει ότι το αντικείμενο x έχει την ιδιότητα K .
- Χρησιμοποιεί επίσης τους **ποσοδείκτες**:
 - $\forall$, ο **καθολικός ποσοδείκτης**. $\forall x \Theta(x)$ μας λέει ότι κάθε x έχει την ιδιότητα Θ .
 - $\exists$, ο **υπαρξιακός ποσοδείκτης**. $\exists x \Theta(x)$ μας λέει ότι υπάρχει κάποιο x που έχει την ιδιότητα Θ .
- Αν γράψουμε,
 - $A(x)$: ο x είναι άνθρωπος
 - $\Theta(x)$: ο x είναι θνητός
 - Σ ο Σωκράτηςο συλλογισμός μας μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\forall x. A(x) \rightarrow \Theta(x) \quad A(\Sigma)}{\Theta(\Sigma)}$$

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες (1)

- Η ορθότητα του συλλογισμού είναι ανεξάρτητη από τη σημασία των A, Θ, Σ .
- Σημασία έχουν τα κατηγορήματα και οι ποσοδείκτες.
- Οι προτάσεις τυγχάνουν ερμηνείας μέσα σε ένα **σύμπαν από αντικείμενα** και ανάλογα μπορούν να είναι αληθείς ή ψευδείς.
- Ο κατηγορηματικός λογισμός ονομάζεται και **πρωτοβάθμια λογική** γιατί σε αυτόν οι ποσοδείκτες αναφέρονται σε στοιχεία του σύμπαντος και όχι σύνολα στοιχείων.

Κατηγορηματικός Λογισμός – Σύνταξη

Μια γλώσσα κατηγορηματικού λογισμού περιέχει:

- **Λογικά σύμβολα**
 - Μεταβλητές: $x, y, z, \dots$
 - Λογικούς συνδέσμους: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
 - Παρενθέσεις: $(,)$
 - Ποσοδείκτες: $\forall, \exists$
- **Μη λογικά σύμβολα**
 - Σταθερές: $c_1, c_2, \dots$
 - Σύμβολα κατηγορημάτων: Για κάθε φυσικό ακέραιο n υπάρχει ένα σύνολο συμβόλων, τα σύμβολα κατηγορημάτων βαθμού n .
 - Σύμβολα συναρτήσεων: Για κάθε φυσικό ακέραιο n υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων n θέσεων.
- Για τον ορισμό μιας γλώσσας κατηγορηματικού λογισμού αρκεί να ορίσουμε το σύνολο των μη λογικών συμβόλων.

Παράδειγμα

- Γλώσσα για Αριθμητική, Λ_A :
 - Σταθερές: 0, 1
 - Σύμβολα κατηγορημάτων: =, $\leq$ (σύμβολα βαθμού 2 – αποτελούν δυαδικές σχέσεις)
 - Σύμβολα συναρτήσεων: +, $\times$ (συναρτήσεις βαθμού 2 – παίρνουν δύο παραμέτρους).

Κατηγορηματικός Λογισμός – Όροι

- Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του κατηγορηματικού λογισμού ονομάζεται *έκφραση*. Δεν αποτελούν όμως όλες οι εκφράσεις νόμιμες προτάσεις.
- Το σύνολο των *όρων* μιας γλώσσας κατηγορηματικού λογισμού παράγεται ως εξής:

$$\text{term} ::= c \mid x \mid f(\text{term}, \dots, \text{term})$$

δηλαδή

κάθε σταθερά της γλώσσας είναι όρος

κάθε μεταβλητή της γλώσσας είναι όρος και,

αν f^n είναι μια συνάρτηση βαθμού n και $t_1, \dots, t_n$ όροι, τότε και ο $f^n(t_1, \dots, t_n)$ είναι όρος.

Ατομικές προτάσεις και έγκυροι τύποι

- *Ατομική πρόταση* του Κατηγορηματικού Λογισμού ορίζουμε ως οποιαδήποτε έκφραση της μορφής $p = R(\text{term}_1, \dots, \text{term}_n)$ όπου R είναι ένα κατηγορηματικό σύμβολο βαθμού n και $\text{term}_1, \dots, \text{term}_n$, όροι της γλώσσας.
- Το σύνολο των *νόμιμων τύπων* του Κατηγορηματικού Λογισμού ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο προτάσεων που παράγονται ως εξής:

$$\phi ::= p \mid (\neg \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi) \mid \forall x \phi \mid \exists x \phi$$

Δηλαδή:

- Κάθε ατομική πρόταση p είναι τύπος
- Αν ϕ είναι ένας τύπος, τότε και η άρνηση του ϕ είναι τύπος
- Αν οι ϕ και ψ είναι τύποι, τότε η σύζευξη, η διάζευξη και η συνεπαγωγή τους είναι επίσης τύποι
- Αν x είναι μια μεταβλητή και ϕ είναι ένας τύπος τότε οι $\forall x \phi$ και $\exists x \phi$ είναι τύποι.

Παράδειγμα

- Όροι στην Λ_A (Διαφάνεια 3-6) είναι οι:
 - 0
 - x
 - $+(0, x)$ (ή $0+x$)
 - $\times(1, +(1, y))$ (ή $1 \times (1+y)$)
 - $+(\times(1,1), +(0,1))$ (ή $(1 \times 1) + (0+1)$)
- Κατηγορήματα στη γλώσσα Λ_A είναι τα:
 - $\leq(0,1)$ (ή $0 \leq 1$)
 - $=(+(0, x), 1)$ (ή $0+x = 1$)
 - $\leq(\times(1, +(1, y)), 0)$ (ή ...)
 - $=(\times(1,1), +(0,1))$ (ή ...)
- Τύπος στη γλώσσα Λ_A είναι ο:
 - $\forall x (\forall y ((1 \leq x) \wedge (1 \leq y) \rightarrow (x+y \leq x \times y) \wedge \neg(x+y \leq x \times y)))$

Ελεύθερες Μεταβλητές

- Στις προτάσεις $\forall x \phi$ και $\exists x \phi$ η πρόταση ϕ ονομάζεται το **βεληνεκές** του ποσοδείκτη. Όταν μια μεταβλητή x βρίσκεται εντός του βεληνεκούς ενός ποσοδείκτη $\forall x$ ή $\exists x$ τότε λέμε ότι η εμφάνιση της μεταβλητής είναι **δεσμευμένη**, διαφορετικά λέμε ότι είναι **ελεύθερη**.
- Ποιες εμφανίσεις μεταβλητών στις πιο κάτω προτάσεις είναι δεσμευμένες και ποιες ελεύθερες;
 - $\forall x(\forall y R(x,y) \rightarrow R(z,c))$
 - $\forall x (R(y,x) \rightarrow \forall y R(x,y))$
 - $\forall x \exists y R(y,x, f(x,y)) \vee (\neg \forall y R(y,f(x)))$

Αντικατάσταση

- Τιμές στις μεταβλητές μιας πρότασης δίνονται μέσω της έννοιας της αντικατάστασης.
- Έστω μεταβλητή x , όρος t και πρόταση ϕ . Ορίζουμε $\phi[t/x]$ ως την πρόταση που λαμβάνουμε αντικαθιστώντας κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x με τον όρο t .
- Αν ϕ είναι ένας τύπος και t ένας όρος τότε λέμε ότι η x είναι αντικαταστίσιμη από τον t στον ϕ αν καμιά ελεύθερη εμφάνιση της x στον ϕ δεν βρίσκεται στο βεληνεκές ενός ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$ όπου y είναι μια μεταβλητή που εμφανίζεται στον t . Ή, ισοδύναμα, καμιά μεταβλητή δεν δεσμεύεται λόγω της αντικατάστασης στον ϕ .
- Παράδειγμα:
Η x είναι αντικαταστίσιμη από τον όρο y στον τύπο $R(x)$ αλλά η x δεν είναι αντικαταστίσιμη από τον όρο y στον τύπο $\forall y R(x)$.

Προτάσεις του Κατηγορηματικού Λογισμού

- **Πρόταση** του Κατηγορηματικού Λογισμού ονομάζεται οποιοσδήποτε τύπος δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.
- Μια πρόταση είναι ένας ισχυρισμός ο οποίος σε διαφορετικά μοντέλα μπορεί να ερμηνευθεί ως αληθής ή ψευδής.

Λογικός Συμπερασμός

- Όπως και στον Προτασιακό Λογισμό, για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων χρησιμοποιούμε ένα σύνολο από αποδεικτικούς κανόνες.
- Η διαδοχική εφαρμογή τέτοιων κανόνων μας επιτρέπει, ξεκινώντας από ένα σύνολο προϋποθέσεων, να καταλήξουμε σε ένα λογικό συμπέρασμα αυτών.

- Γράφουμε

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$$

αν το συμπέρασμα ψ μπορεί να αποδειχθεί δεδομένων των προϋποθέσεων $\phi_1, \phi_2, \dots$ και ϕ_n .

- Όλοι οι κανόνες του Προτασιακού Λογισμού είναι και κανόνες του Κατηγορηματικού Λογισμού. Επιπλέον έχουμε τους ακόλουθους κανόνες.

Κανόνες ισότητας

$$\frac{}{t = t} =_i$$

$$\frac{t_1 = t_2 \quad \phi[t_1 / x]}{\phi[t_2 / x]} =_e$$

- Για να ισχύει ο κανόνας $=_e$ προφανώς πρέπει να ισχύει ότι τα t_1 και t_2 είναι αντικαταστάσιμα για το x στην ϕ .
- Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι κάθε φορά που γράφουμε $\phi[t/x]$ η x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t .

Παραδείγματα

- Να δείξετε ότι

$$x+1 = 1+x, (x+1>1) \rightarrow (x+1>0) \vdash (1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$$

Απόδειξη

- | | | |
|----|-------------------------------|------------|
| 1. | $x + 1 = 1 + x$ | προϋπόθεση |
| 2. | $(x+1>1) \rightarrow (x+1>0)$ | προϋπόθεση |
| 3. | $(1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$ | $=_e 1, 2$ |

- Να δείξετε ότι $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$.

Απόδειξη

- | | | |
|----|-------------|--|
| 1. | $t_1 = t_2$ | προϋπόθεση |
| 2. | $t_1 = t_1$ | $=_i$ |
| 3. | $t_2 = t_1$ | $=_e 1, 2$ όπου ϕ η πρόταση $x = t_1$ |

- Άσκηση: Να δείξετε ότι $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$.

Νόμοι Καθολικού Ποσοδείκτη (1)

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t / x]} \quad \forall x e$$

- **Εξήγηση κανόνα:** Αν η πρόταση ϕ ισχύει για κάθε x , τότε ισχύει και για κάποιο συγκεκριμένο όρο t .
- **Υπενθύμιση:** Το x πρέπει να είναι (ως συνήθως) αντικαταστάσιμο από το t για να ισχύει ο κανόνας. Διαφορετικά, για

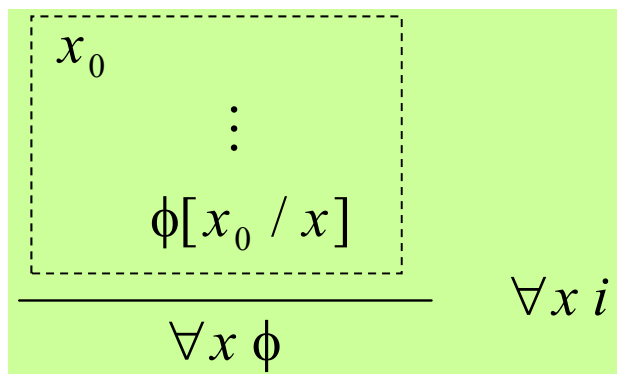
$$\phi = \exists y (y < x)$$

αν θεωρήσουμε ότι $t = y$, τότε από τον κανόνα θα είχαμε ότι το

$\forall x \exists y (y < x)$ συνεπάγεται

$$\exists y (y < y)$$

Νόμοι Καθολικού Ποσοδείκτη (2)



- Το κουτί σε αυτό τον κανόνα διαφέρει από τα κουτιά που χρησιμοποιήσαμε στους κανόνες του Προτασιακού Λογισμού. Εδώ το x_0 δεν αποτελεί υπόθεση αλλά δείχνει το βεληνεκές της συγκεκριμένης βοηθητικής μεταβλητής.
- **Εξήγηση κανόνα:** Αν ξεκινώντας με μια καινούρια μεταβλητή x_0 αποδείξουμε την πρόταση ϕ που περιέχει το x_0 , τότε η πρόταση ϕ ισχύει για οποιαδήποτε μεταβλητή.
- Σημαντικό εδώ είναι το x_0 να είναι **καινούρια** μεταβλητή η οποία δεν περιέχεται έξω από το κουτί και για την οποία δεν υπάρχει οποιαδήποτε υπόθεση.

Παράδειγμα (1)

- Να δείξετε ότι $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$.

Απόδειξη:

1.	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\forall x P(x)$	προϋπόθεση
3.	x_0	
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e 1$
5.	$P(x_0)$	$\forall x_e 2$
6.	$Q(x_0)$	
7.	$\forall x Q(x)$	

Παράδειγμα (2)

- Να δείξετε ότι $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)), P(t) \vdash \neg Q(t)$.

Απόδειξη:

- | | | |
|----|--|---------------------|
| 1. | $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | προϋπόθεση |
| 2. | $P(t)$ | προϋπόθεση |
| 3. | $P(t) \rightarrow \neg Q(t)$ | $\forall x_e 1$ |
| 4. | $\neg Q(t)$ | $\rightarrow_e 3,2$ |

Νόμοι Υπαρξιακού Ποσοδείκτη (1)

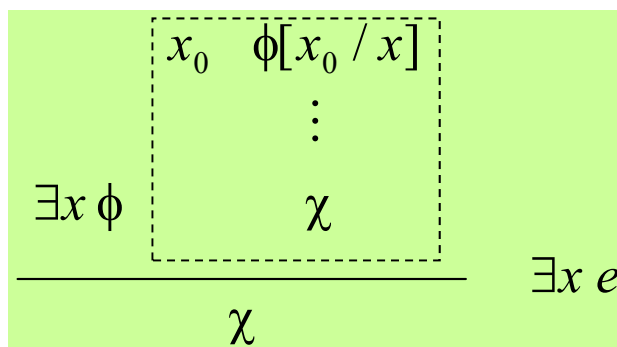
$$\frac{\phi[t / x]}{\exists x \phi} \quad \exists x i$$

- **Εξήγηση κανόνα:** Αν δείξουμε ότι η πρόταση ϕ ισχύει για κάποιο όρο t , τότε υπάρχει τιμή της μεταβλητής για την οποία ισχύει.
- **Παράδειγμα:** Να δείξετε ότι $\forall x \phi \vdash \exists x \phi$.

Απόδειξη:

- | | |
|---------------------|-----------------|
| 1. $\forall x \phi$ | προϋπόθεση |
| 2. $\phi(x/x)$ | $\forall x_e 1$ |
| 3. $\exists x \phi$ | $\exists x_i 2$ |

Νόμοι Υπαρξιακού Ποσοδείκτη (2)



- **Εξήγηση κανόνα:** Αν υποθέτοντας την ύπαρξη μιας μεταβλητής x_0 για την οποία ισχύει η πρόταση ϕ (που ξέρουμε ότι υπάρχει από την προϋπόθεση $\exists x \phi$) μπορούμε να αποδείξουμε μια πρόταση χ η οποία δεν περιέχει το x_0 , τότε η πρόταση χ ισχύει.
- Σημαντικό εδώ είναι, και πάλι, το x_0 να είναι καινούρια μεταβλητή η οποία δεν περιέχεται έξω από το κουτί και για την οποία δεν υπάρχει οποιαδήποτε υπόθεση.

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$.

Απόδειξη:

1.	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\exists x P(x)$	προϋπόθεση
3.	$x_0 \quad P(x_0)$	υπόθεση
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e 1$
5.	$Q(x_0)$	$\rightarrow_e 4, 3$
6.	$\exists x Q(x)$	$\exists x_i 5$
7.	$\exists x Q(x)$	

(Αντι-)Παράδειγμα

- Ποιο είναι το πρόβλημα με την πιο κάτω απόδειξη του $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$;

Απόδειξη:

1.	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\exists x P(x)$	προϋπόθεση
3.	$x_0 \quad P(x_0)$	υπόθεση
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e 1$
5.	$Q(x_0)$	$\rightarrow_e 4, 3$
6.	$Q(x_0)$	$\exists x_e 2, 3-5$
7.	$\exists x Q(x)$	$\exists x_i 6$

- Στη γραμμή 6 επιτράπηκε στην εσωτερική μεταβλητή x_0 να διαφύγει από το βεληνεκές της. Τέτοια λάθη μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα:

Παράδειγμα Λανθασμένης Απόδειξης

- Ποιο είναι το πρόβλημα με την πιο κάτω απόδειξη του
 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x P(x) \vdash \forall y Q(y)$;

Απόδειξη:

1.	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\exists x P(x)$	προϋπόθεση
3.	x_0	
4.	$x_0 \quad P(x_0)$	υπόθεση
5.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e 1$
6.	$Q(x_0)$	$\rightarrow_e 4, 5$
7.	$Q(x_0)$	$\exists x_e 2, 4-6$
8.	$\forall y Q(y)$	$\forall y_i 3-7$

- Στη γραμμή 7 επιτράπηκε στην εσωτερική μεταβλητή x_0 να διαφύγει από το βεληνεκές της!

Ποσοτικές Ισοδυναμίες

- Όπως και στον Προτασιακό Λογισμό, γράφουμε $\phi \dashv \vdash \psi$ αν ισχύει ότι $\phi \vdash \psi$ και $\psi \vdash \phi$ και λέμε ότι οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.
- Μπορούμε να αποδείξουμε τις πιο κάτω ισοδυναμίες του Κατηγορηματικού Λογισμού.
 1. $\neg \forall x \phi \dashv \vdash \exists x \neg \phi$
 2. $\neg \exists x \phi \dashv \vdash \forall x \neg \phi$
 3. $\forall x \phi \wedge \forall x \psi \dashv \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$
 4. $\exists x \phi \vee \exists x \psi \dashv \vdash \exists x (\phi \vee \psi)$
 5. $\forall x \forall y \phi \dashv \vdash \forall y \forall x \phi$
 6. $\exists x \exists y \phi \dashv \vdash \exists y \exists x \phi$

Ποσοτικές Ισοδυναμίες

Εφόσον το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στο ψ

$$7. \quad \forall x \phi \wedge \psi \vdash \vdash \forall x (\phi \wedge \psi)$$

$$8. \quad \forall x \phi \vee \psi \vdash \vdash \forall x (\phi \vee \psi)$$

$$9. \quad \exists x \phi \wedge \psi \vdash \vdash \exists x (\phi \wedge \psi)$$

$$10. \quad \exists x \phi \vee \psi \vdash \vdash \exists x (\phi \vee \psi)$$

$$11. \quad \exists x (\phi \rightarrow \psi) \vdash \vdash \forall x \phi \rightarrow \psi$$

$$12. \quad \forall x (\psi \rightarrow \phi) \vdash \vdash \psi \rightarrow \forall x \phi$$

$$13. \quad \exists x (\psi \rightarrow \phi) \vdash \vdash \psi \rightarrow \exists x \phi$$

$$14. \quad \forall x (\phi \rightarrow \psi) \vdash \vdash \exists x \phi \rightarrow \psi$$

Απόδειξη Ισοδυναμίας 1

1.	$\neg \forall x \phi$	προϋπόθεση
2.	$\neg \exists x \neg \phi$	υπόθεση
3.	x_0	
4.	$\neg \phi[x_0/x]$	υπόθεση
5.	$\exists x \neg \phi$	$\exists x_i 4$
6.	$\perp$	$\neg_e 5,2$
7.	$\phi[x_0/x]$	
8.	$\forall x \phi$	
9.	$\perp$	
10.	$\exists x \neg \phi$	

Απόδειξη Ισοδυναμίας 1 (συν.)

1.	$\exists x \neg \phi$	προϋπόθεση
2.	$\forall x \phi$	υπόθεση
3.	x_0	
4.	$\neg \phi[x_0/x]$	υπόθεση
5.	$\phi[x_0/x]$	$\forall x_e 2$
6.	$\perp$	$\neg_e 5,4$
7.	$\perp$	$\exists x_e 1, 3-6$
8.	$\neg \forall x \phi$	$\neg_i 2-7$

Σημασιολογία Κατηγορηματικού Λογισμού

- Σημασιολογία – εναλλακτικός (και ισοδύναμος) χαρακτηρισμός ενός λογισμού
 - Προτασιακός Λογισμός: πίνακες αλήθειας
 - Κατηγορηματικός Λογισμός: μοντέλα
- Αποδεικτική Θεωρία – ασχολείται με την κατασκευή αποδείξεων λογικών επακόλουθων με τη χρήση αποδεικτικών κανόνων
 - Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα λογικό επακόλουθο δεν ισχύει;
 - «Θετικός» χαρακτηρισμός του λογισμού
- Σημασιολογία – Έστω ο συλλογισμός $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$
 - Για να δείξουμε ότι ένα λογικό επακόλουθο δεν είναι ορθό αρκεί να επιδείξουμε ένα «μοντέλο» όπου ο συλλογισμός δεν ισχύει
 - Για να δείξουμε ότι ισχύει αποδεικνύουμε ότι είναι ορθό με βάση τους κανόνες της σημασιολογίας.

Ερμηνείες (Interpretation)

- **Ερμηνεία** ή **δομή** για μια γλώσσα κατηγορηματικού λογισμού είναι η απόδοση εννοιών στα μη-λογικά σύμβολα που απαρτίζουν τη γλώσσα, δηλαδή, τα κατηγορήματα, τις συναρτήσεις και τις σταθερές. Πιο συγκεκριμένα:
- **Ερμηνεία M** μιας γλώσσας κατηγορηματικού λογισμού είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από
 - Ένα σύνολο $A \neq \emptyset$
(το σύμπαν των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται η λογική γλώσσα)
 - Μια αντιστοίχιση ενός στοιχείου από το A σε κάθε σύμβολο σταθεράς της γλώσσας.
Γράφουμε c^A για το στοιχείο που αντιστοιχείται στο σύμβολο c.
 - Μια αντιστοίχιση μιας συνάρτησης με n μεταβλητές σε κάθε σύμβολο συνάρτησης με n μεταβλητές της γλώσσας.
Γράφουμε f^A για τη συνάρτηση που αντιστοιχείται στο σύμβολο f.
 - Μια αντιστοίχιση μιας σχέσης με n μεταβλητές σε κάθε σύμβολο κατηγορήματος με βαθμού n της γλώσσας.
Γράφουμε R^A για τη σχέση που αντιστοιχείται στο σύμβολο R.

Παράδειγμα

- Έστω μια κατηγορηματική γλώσσα με δύο κατηγορηματικά σύμβολα δύο θέσεων leq , eq και δύο σύμβολα συναρτήσεων m και p (δύο θέσεων). Δυνατές ερμηνείες στη γλώσσα περιλαμβάνουν τις εξής:
 1. $A =$ οι θετικοί ακέραιοι, $leq = \leq$, $eq = =$, $m = -$, $p = +$
 2. $A =$ οι ακέραιοι, $leq = \leq$, $eq = =$, $m = -$, $p = +$
 3. $A =$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών, $leq = \subseteq$, $eq = =$, $m = -$, $p = \cup$

Αν τώρα θεωρήσουμε τις προτάσεις

- $\phi = \forall x (p(x, x) eq x)$
- $\chi = \forall x \exists y p(y, y) leq x$
- $\psi = \forall x \exists y x leq y \wedge \neg (x eq y)$

παρατηρούμε ότι κάθε μια έχει διαφορετική σημασία και σε κάθε ερμηνεία παίρνει διαφορετικές τιμές αλήθειας.

Απονομές

- Έστω $V = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας Γ και μια ερμηνεία της Γ με σύμπαν αντικειμένων το A . Τότε **απονομή** ονομάζεται κάθε συνάρτηση $s: V \rightarrow A$.
- Μία απονομή μας επιτρέπει να δώσουμε ερμηνεία σε κάθε όρο t της γλώσσας μας. Ορίζουμε το $s(t)$ με επαγωγή στους όρους ως εξής:
 - Αν $t = v$ τότε $s(t) = s(v)$
 - Αν $t = c$ τότε $s(t) = c^A$
 - Αν $t_1, \dots, t_n$ είναι όροι, τότε $s(f(t_1, \dots, t_n)) = f^A(s(t_1), \dots, s(t_n))$
- Παράδειγμα. Έστω η γλώσσα Λ_A (διαφάνεια 3-6) και ερμηνεία με σύμπαν αντικειμένων A το σύνολο των **φυσικών αριθμών**, $=^A$ την ισότητα μεταξύ των φυσικών αριθμών, $\leq^A$ τη σχέση διάταξης στο $\mathbb{N}$, $+^A$ και $\times^A$ η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των φυσικών και $0^A, 1^A$ οι φυσικοί αριθμοί 0 και 1. Έστω $s: V \rightarrow \mathbb{N}$ η αποτίμηση **$s(x_k) = 2k$** . Τότε

$$s(x_1 \times x_2 + 1) = s(x_1 \times x_2) +^A s(1) = s(x_1) \times^A s(x_2) + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

Σημασιολογία - Η αλήθεια του Tarski

- Έστω ερμηνεία M και απονομή s . Ορίζουμε τι σημαίνει ο τύπος ϕ να ικανοποιείται στην ερμηνεία M βάσει της s , $M \models_s \phi$, επαγωγικά ως εξής:
 - Αν $\phi = R(t_1, \dots, t_n)$ τότε
 $M \models_s R(t_1, \dots, t_n)$ αν και μόνο αν $R^M(s(t_1), \dots, s(t_n))$
 - Αν $\phi = \neg \psi$ τότε
 $M \models_s \phi$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $M \models_s \psi$ (ή $M \not\models_s \psi$)
 - Αν $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ ή $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ τότε
 $M \models_s (\phi_1 \wedge \phi_2)$ αν και μόνο αν $M \models_s \phi_1$ και $M \models_s \phi_2$
 $M \models_s (\phi_1 \vee \phi_2)$ αν και μόνο αν $M \models_s \phi_1$ ή $M \models_s \phi_2$
 $M \models_s (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ αν και μόνο αν $M \not\models_s \phi_1$ ή $M \models_s \phi_2$
 - Αν $\phi = \forall x \psi$ τότε
 $M \models_s \phi$ αν και μόνο αν $M \models_{s[x \mapsto a]} \psi$ για όλα τα $a \in A$, όπου
$$s[x \mapsto a](y) = \begin{cases} a & \text{if } y = x \\ s(y) & \text{otherwise} \end{cases}$$
 - Αν $\phi = \exists x \psi$ τότε
 $M \models_s \phi$ αν και μόνο αν $M \models_{s[x \mapsto a]} \psi$ για κάποιο $a \in A$.

Παράδειγμα

- Έστω η ερμηνεία
 - Α το σύνολο των φυσικών αριθμών
 - eq η σχέση = σε αυτούς και leq η σχέση $\leq$ σε αυτούς.
- Η πρόταση $\forall x \forall y (eq(x,y) \rightarrow eq(y,x))$ ικανοποιείται στην ερμηνεία για οποιαδήποτε απονομή τιμών στις μεταβλητές της.
- Η πρόταση $x \text{ leq } y \wedge \neg (x \text{ eq } y)$ ικανοποιείται στην ερμηνεία με π.χ. απονομή τιμών s, όπου $s[x] = 1$ και $s[y] = 4$.
- Η πρόταση $\forall x \exists y (y \text{ leq } x \wedge \neg (x \text{ eq } y))$ δεν ικανοποιείται στην ερμηνεία αφού για $x = 0$ δεν υπάρχει καμία απονομή τιμής στη y που να κάνει την πρόταση $y \text{ leq } x \wedge \neg (x \text{ eq } y)$ αληθή.

Μοντέλα

- **Θεώρημα:** Αν ϕ είναι ένας τύπος που δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές (δηλαδή, είναι πρόταση) τότε η ικανοποιησιμότητά της δεν επηρεάζεται από την απονομή s . Σε τέτοια περίπτωση γράφουμε $M \models \phi$.
- **Ορισμός:** Αν Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων μιας κατηγορηματικής γλώσσας τότε μια ερμηνεία M ονομάζεται **μοντέλο** του Σ αν για κάθε $\phi \in \Sigma$ έχουμε ότι $M \models \phi$. Σε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η ϕ είναι **αληθής** στην ερμηνεία M .
- Έστω πρόταση ϕ μιας κατηγορηματικής γλώσσας Λ .
 - Η ϕ είναι **ικανοποιήσιμη** αν υπάρχει ερμηνεία της Λ και απονομή s που την κάνουν αληθή.
 - Η ϕ είναι **έγκυρη** αν είναι αληθής σε κάθε ερμηνεία και απονομή της Λ .

Παράδειγμα

- Να αποδείξετε ότι οι πιο κάτω τύποι είναι έγκυροι.
 1. $\forall x p(x) \rightarrow p(a)$
 2. $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x \psi)$, όπου η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στην πρόταση ϕ

Απόδειξη (1).

Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος δεν είναι έγκυρος. Τότε υπάρχει ερμηνεία M της γλώσσας για την οποία $M \models \forall x p(x)$ και $M \not\models p(a)$.

Εφόσον όμως $M \models \forall x p(x)$, για κάθε απονομή s και τιμή d ,

$$M \models_{s[x \mapsto d]} p(x)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η πρόταση ισχύει και για $x = a$. Επομένως,

$$M \models_{s[x \mapsto a]} p(x) \text{ και } M \models p(a).$$

Αντίφαση!

Σημασιολογική Συνεπαγωγή

- Έστω τύποι $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \psi$. Τότε γράφουμε $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$ αν για κάθε μοντέλο M και απονομή s τέτοια ώστε $M \models_s \phi_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει επίσης ότι $M \models_s \psi$. Ονομάζουμε την $\models$ **σημασιολογική συνεπαγωγή**.
- Αν δύο προτάσεις ϕ_1, ϕ_2 είναι τέτοιες ώστε $\phi_2 \models \phi_1$ αν και μόνο αν $\phi_1 \models \phi_2$ τότε λέμε ότι είναι **σημασιολογικά ισοδύναμες**.
- Παραδείγματα: Οι πιο κάτω προτάσεις είναι σημασιολογικά ισοδύναμες.
 - $\forall x \phi \wedge \forall x \psi$ και $\forall x (\phi \wedge \psi)$
 - $\exists x \phi \vee \exists x \psi$ και $\exists x (\phi \vee \psi)$
 - $\forall x \forall y \phi$ και $\forall y \forall x \phi$
 - $\exists x \exists y \phi$ και $\exists y \exists x \phi$

Ορθότητα και Πληρότητα

- Θεώρημα: Έστω προτάσεις του Κατηγορηματικού Λογισμού $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ και ψ . Τότε

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi.$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη της ορθότητας (ότι δηλαδή αν $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ τότε $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$) αποδεικνύεται με επαγωγή στο μέγεθος της απόδειξης και ανάλυση όλων των κανόνων συμπερασμού της θεωρίας μας.

Η απόδειξη της Πληρότητας (το Θεώρημα Godel) βασίζεται στις έννοιες της συνέπειας και των κατασκευών Henkin.

Διαγνωσιμότητα

- Έστω πρόταση ϕ του Κατηγορηματικού Λογισμού. Ισχύει ότι $\models \phi$. Ναι ή όχι;
- Οι Alonzo Church και Alan Turing έχουν δείξει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να επιλύει αυτό το πρόβλημα.
- Κατά συνέπεια, ο Κατηγορηματικός Λογισμός είναι μη-διαγνώσιμος.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε τις πιο κάτω προτάσεις δεδομένου ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στο ψ

$$1. \exists x (\phi \rightarrow \psi) \vdash \forall x \phi \rightarrow \psi$$

$$2. \exists x (\psi \rightarrow \phi) \vdash \psi \rightarrow \exists x \phi$$

$$3. \exists x (\phi \rightarrow \psi) \models \forall x \phi \rightarrow \psi$$

$$4. \exists x (\psi \rightarrow \phi) \models \psi \rightarrow \exists x \phi$$