Κατηγορηματικός Λογισμός

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Εισαγωγή στον Κατηγορηματικό Λογισμό

- *Σύνταξη*
- *Κανόνες Συμπερασμού*
- *Σημασιολογία*

Κίνητρα

- Υπάρχουν ήδη συλλογισμών που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν μέσω του προτασιακού λογισμού. Για παράδειγμα

> Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
> Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
> Συμπέρασμα: Ο Σωκράτης είναι θνητός

- Στον προτασιακό συλλογισμό κάθε μια από τις πιο πάνω προτάσεις αποτελεί δήλωση η οποία μπορεί να πάρει ανεξάρτητα από κάθε άλλη τις τιμές T και F.

- Όμως, η ορθότητα του συλλογισμού εξαρτάται από τη δομή των επιμέρους προτάσεων καθώς και από τη σημασία της έκφρασης «όλοι οι άνθρωποι».

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες (1)

- Για τον σκοπό αυτό ο κατηγορηματικός λογισμός εισάγει την έννοια του κατηγορήματος της μορφής K(x) που μας λέει ότι το αντικείμενο x έχει την ιδιότητα K.

- Χρησιμοποιεί επίσης τους ποσοδείκτες:
  - $\forall$, ο καθολικός ποσοδείκτης. $\forall x\ \Theta(x)$ μας λέει ότι κάθε x έχει την ιδιότητα Θ.
  - $\exists$, ο υπαρξιακός ποσοδείκτης. $\exists x\ \Theta(x)$ μας λέει ότι υπάρχει κάποιο x που έχει την ιδιότητα Θ.

- Αν γράψουμε,
  - A(x): ο x είναι άνθρωπος
  - Θ(x): ο x είναι θνητός
  - Σ ο Σωκράτης

  ο συλλογισμός μας μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x.\ A(x) \rightarrow \Theta(x) \\ A(\Sigma)\end{array}}{\Theta(\Sigma)}$$

Κατηγορήματα και ποσοδείκτες (1)

- Η ορθότητα του συλλογισμού είναι ανεξάρτητη από τη σημασία των Α, Θ, Σ.

- Σημασία έχουν τα κατηγορήματα και οι ποσοδείκτες.

- Οι προτάσεις τυγχάνουν ερμηνείας μέσα σε ένα σύμπαν από αντικείμενα και ανάλογα μπορούν να είναι αληθείς ή ψευδείς.

- Ο κατηγορηματικός λογισμός ονομάζεται και πρωτοβάθμια λογική γιατί σε αυτόν οι ποσοδείκτες αναφέρονται σε στοιχεία του σύμπαντος και όχι σύνολα στοιχείων.

Κατηγορηματικός Λογισμός – Σύνταξη

Μια γλώσσα κατηγορηματικού λογισμού περιέχει:

- Λογικά σύμβολα
  - Μεταβλητές: x, y, z, …
  - Λογικούς συνδέσμους: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
  - Παρενθέσεις: (,)
  - Ποσοδείκτες: $\forall, \exists$
- Μη λογικά σύμβολα
  - Σταθερές: $c_1, c_2, \ldots$
  - Σύμβολα κατηγορημάτων: Για κάθε φυσικό ακέραιο n υπάρχει ένα σύνολο συμβόλων, τα σύμβολα κατηγορημάτων βαθμού n.
  - Σύμβολα συναρτήσεων: Για κάθε φυσικό ακέραιο n υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων n θέσεων.

- Για τον ορισμό μιας γλώσσας κατηγορηματικού λογισμού αρκεί να ορίσουμε το σύνολο των μη λογικών συμβόλων.

Παράδειγμα

- Γλώσσα για Αριθμητική, $Λ_A$:
  - Σταθερές: 0, 1
  - Σύμβολα κατηγορημάτων: =, $\leq$ (σύμβολα βαθμού 2 – αποτελούν δυαδικές σχέσεις)
  - Σύμβολα συναρτήσεων: +, $\times$ (συναρτήσεις βαθμού 2 – παίρνουν δύο παραμέτρους).

Κατηγορηματικός Λογισμός – Όροι

- Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του κατηγορηματικού λογισμού ονομάζεται *έκφραση*. Δεν αποτελούν όμως όλες οι εκφράσεις νόμιμες προτάσεις.

- Το σύνολο των *όρων* μιας γλώσσας κατηγορηματικού λογισμού παράγεται ως εξής:

  term ::= c | x | f(term, …, term)

  δηλαδή

  κάθε σταθερά της γλώσσας είναι όρος

  κάθε μεταβλητή της γλώσσας είναι όρος και,

  αν f^n είναι μια συνάρτηση βαθμού n και $t_1, \ldots, t_n$ όροι, τότε και ο $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Ατομικές προτάσεις και έγκυροι τύποι

- *Ατομική πρόταση* του Κατηγορηματικού Λογισμού ορίζούμε ως οποιαδήποτε έκφραση της μορφής p = R(term1, …, $term_n$) όπου R είναι ένα κατηγορηματικό σύμβολο βαθμού n και $term_1$, …, $term_n$, όροι της γλώσσας.

- Το σύνολο των *νόμιμων τύπων* του Κατηγορηματικού Λογισμού ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο προτάσεων που παράγονται ως εξής:

$$\phi ::= p \;|\; (\neg \phi) \;|\; (\phi \vee \phi) \;|\; (\phi \wedge \phi) \;|\; (\phi \rightarrow \phi) \;|\; \forall x\, \phi \;|\; \exists x\, \phi$$

  Δηλαδή:

  – Κάθε ατομική πρόταση p είναι τύπος

  – Αν η Φ είναι ένας τύπος, τότε και η άρνηση του Φ είναι τύπος

  – Αν οι Φ και Ψ είναι τύποι, τότε η σύζευξη, η διάζευξη και η συνεπαγωγή τους είναι επίσης τύποι

  – Αν η x είναι μια μεταβλητή και η Φ είναι ένας τύπος τότε οι $\forall x\, \phi$ και $\exists x\, \phi$ είναι τύποι.

Παράδειγμα

- Όροι στην $Λ_A$ (Διαφάνεια 3-6) είναι οι:
  - 0
  - x
  - $+(0, x)$ (ή $0+x$)
  - $\times(1, +(1, y))$ (ή $1\times(1+y)$)
  - $+(\times(1,1), +(0,1))$ (ή $(1\times 1) + (0+1)$)

- Κατηγορήματα στη γλώσσα $Λ_A$ είναι τα:
  - $\leq(0,1)$ (ή $0 \leq 1$)
  - $= (+(0, x), 1)$ (ή $0+x = 1$)
  - $\leq(\times(1, +(1, y),),0)$ (ή …)
  - $=(\times(1,1), +(0,1)))$ (ή …)

- Τύπος στη γλώσσα $Λ_A$ είναι ο:
  - $\forall x\ (\forall y\ ((1 \leq x) \wedge (1 \leq y) \rightarrow (x+y \leq x\times y) \wedge \neg(x+y \leq x\times y)\ ))$

Ελεύθερες Μεταβλητές

- Στις προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\exists x\ \phi$ η πρόταση ϕ ονομάζεται το βεληνεκές του ποσοδείκτη. Όταν μια μεταβλητή x βρίσκεται εντός του βεληνεκούς ενός ποσοδείκτη $\forall x$ ή $\exists x$ τότε λέμε ότι η εμφάνιση της μεταβλητής είναι δεσμευμένη, διαφορετικά λέμε ότι είναι ελεύθερη.

- Ποιες εμφανίσεις μεταβλητών στις πιο κάτω προτάσεις είναι δεσμευμένες και ποιες ελεύθερες;
  - $\forall x(\forall y\ R(x,y) \rightarrow R(z,c))$
  - $\forall x\ (R(y,x) \rightarrow \forall y\ R(x,y))$
  - $\forall x\ \exists y\ R(y,x, f(x,y)) \vee (\neg\ \forall y\ R(y,f(x)))$

Αντικατάσταση

- Τιμές στις μεταβλητές μιας πρότασης δίνονται μέσω της έννοιας της αντικατάστασης.
- Έστω μεταβλητή x, όρος t και πρόταση ϕ. Ορίζουμε ϕ[t/x] ως την πρόταση που λαμβάνουμε αντικαθιστώντας *κάθε ελεύθερη εμφάνιση* της μεταβλητής x με τον όρο t.
- Αν φ είναι ένας τύπος και t ένας όρος τότε λέμε ότι η x είναι αντικαταστίσιμη από τον t στον φ αν καμιά ελεύθερη εμφάνιση της x στον φ δεν βρίσκεται στο βεληνεκές ενός ποσοδείκτη ∀y ή ∃y όπου y είναι μια μεταβλητή που εμφανίζεται στον t. Ή, ισοδύναμα, καμιά μεταβλητή δεν δεσμεύεται λόγω της αντικατάστασης στον φ.
- Παράδειγμα:
  Η x είναι αντικαταστίσιμη από τον όρο y στον τύπο R(x) αλλά
  η x δεν είναι αντικαταστίσιμη από τον όρο y στον τύπο ∀y R(x).

Προτάσεις του Κατηγορηματικού Λογισμού

- Πρόταση του Κατηγορηματικού Λογισμού ονομάζεται οποιοσδήποτε τύπος δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.

- Μια πρόταση είναι ένας ισχυρισμός ο οποίος σε διαφορετικά μοντέλα μπορεί να ερμηνευθεί ως αληθής ή ψευδής.

Λογικός Συμπερασμός

- Όπως και στον Προτασιακό Λογισμό, για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων χρησιμοποιούμε ένα σύνολο από αποδεικτικούς κανόνες.

- Η διαδοχική εφαρμογή τέτοιων κανόνων μας επιτρέπει, ξεκινώντας από ένα σύνολο προϋποθέσεων, να καταλήξουμε σε ένα λογικό συμπέρασμα αυτών.

- Γράφουμε

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

  αν το συμπέρασμα ψ μπορεί να αποδειχθεί δεδομένων των προϋποθέσεων ϕ_1, ϕ_2, . . . και ϕ_n.

- Όλοι οι κανόνες του Προτασιακού Λογισμού είναι και κανόνες του Κατηγορηματικού Λογισμού. Επιπλέον έχουμε τους ακόλουθους κανόνες.

Κανόνες ισότητας

$$\frac{}{t = t} =_i \qquad \frac{t_1 = t_2 \quad \phi[t_1 / x]}{\phi[t_2 / x]} =_e$$

- Για να ισχύει ο κανόνας $=_e$ προφανώς πρέπει να ισχύει ότι τα t_1 και t_2 είναι αντικαταστίσιμα για το x στην φ.

- Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι κάθε φορά που γράφουμε φ[t/x] η x είναι αντικαταστίσιμη από τον όρο t.

Παραδείγματα

- Να δείξετε ότι

$$x+1 = 1+x,\ (x+1>1) \rightarrow (x+1>0) \vdash (1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$$

Απόδειξη

1.	$x+1 = 1+x$	προϋπόθεση
2.	$(x+1>1) \rightarrow (x+1>0)$	προϋπόθεση
3.	$(1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$	$=_e$ 1, 2

- Να δείξετε ότι $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$.

Απόδειξη

1.	$t_1 = t_2$	προϋπόθεση
2.	$t_1 = t_1$	$=_i$
3.	$t_2 = t_1$	$=_e$ 1, 2 όπου ϕ η πρόταση $x = t_1$

- Άσκηση: Να δείξετε ότι $t_1 = t_2,\ t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$.

Νόμοι Καθολικού Ποσοδείκτη (1)

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]} \quad \forall x\, e$$

- Εξήγηση κανόνα: Αν η πρόταση φ ισχύει για κάθε x, τότε ισχύει και για κάποιο συγκεκριμένο όρο t.

- Υπενθύμιση: Το x πρέπει να είναι (ως συνήθως) αντικαταστίσιμο από το t για να ισχύει ο κανόνας. Διαφορετικά, για

  $\phi = \exists y\ (y<x)$

  αν θεωρήσουμε ότι t = y, τότε από τον κανόνα θα είχαμε ότι το **$\forall x\ \exists y\ (y<x)$** συνεπάγεται

  $\exists y\ (y<y)$

Νόμοι Καθολικού Ποσοδείκτη (2)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad \phi[x_0 / x] \end{array}}}{\forall x\, \phi} \quad \forall x\, i$$

- Το κουτί σε αυτό τον κανόνα διαφέρει από τα κουτιά που χρησιμοποιήσαμε στους κανόνες του Προτασιακού Λογισμού. Εδώ το x_0 δεν αποτελεί υπόθεση αλλά δείχνει το βεληνεκές της συγκεκριμένης βοηθητικής μεταβλητής.

- Εξήγηση κανόνα: Αν ξεκινώντας με μια καινούρια μεταβλητή x_0 αποδείξουμε την πρόταση ϕ που περιέχει το x_0, τότε η πρόταση ϕ ισχύει για οποιαδήποτε μεταβλητή.

- Σημαντικό εδώ είναι το x_0 να είναι καινούρια μεταβλητή η οποία δεν περιέχεται έξω από το κουτί και για την οποία δεν υπάρχει οποιαδήποτε υπόθεση.

Παράδειγμα (1)

- Να δείξετε ότι $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x\ P(x) \vdash \forall x\ Q(x)$.

Απόδειξη:

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\forall x\ P(x)$	προϋπόθεση
3.	x_0	
4.	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e$ 1
5.	$P(x_0)$	$\forall x_e$ 2
6.	$Q(x_0)$	
7.	$\forall x\ Q(x)$	

Παράδειγμα (2)

- Να δείξετε ότι $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x)),\ P(t) \vdash \neg Q(t)$.

Απόδειξη:

1.	$\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$P(t)$	προϋπόθεση
3.	$P(t) \rightarrow \neg Q(t)$	$\forall x_e$ 1
4.	$\neg Q(t)$	$\rightarrow_e$ 3,2

Νόμοι Υπαρξιακού Ποσοδείκτη (1)

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\, \phi} \quad \exists x\, i$$

- Εξήγηση κανόνα: Αν δείξουμε ότι η πρόταση ϕ ισχύει για κάποιο όρο t, τότε υπάρχει τιμή της μεταβλητής για την οποία ισχύει.

- Παράδειγμα: Να δείξετε ότι $\forall x\ \phi \vdash \exists x\ \phi$.

  Απόδειξη:

1.	$\forall x\ \phi$	προϋπόθεση
2.	$\phi(x/x)$	$\forall x_e$ 1
3.	$\exists x\ \phi$	$\exists x_i$ 2

Νόμοι Υπαρξιακού Ποσοδείκτη (2)

$$\frac{\exists x\, \phi \qquad \boxed{\begin{matrix} x_0 \quad \phi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{matrix}}}{\chi}\ \exists x\, e$$

- Εξήγηση κανόνα: Αν υποθέτοντας την ύπαρξη μιας μεταβλητής x_0 για την οποία ισχύει η πρόταση φ (που ξέρουμε ότι υπάρχει από την προϋπόθεση ∃x φ) μπορούμε να αποδείξουμε μια πρόταση χ η οποία δεν περιέχει το x_0, τότε η πρόταση χ ισχύει.

- Σημαντικό εδώ είναι, και πάλι, το x_0 να είναι καινούρια μεταβλητή η οποία δεν περιέχεται έξω από το κουτί και για την οποία δεν υπάρχει οποιαδήποτε υπόθεση.

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\ P(x) \vdash \exists x\ Q(x)$.

Απόδειξη:

1.		$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.		$\exists x\ P(x)$	προϋπόθεση
3.	x_0	$P(x_0)$	υπόθεση
4.		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e$ 1
5.		$Q(x_0)$	$\rightarrow_e$ 4, 3
6.		$\exists x\ Q(x)$	$\exists x_i$ 5
7.		$\exists x\ Q(x)$	

(Αντι-)Παράδειγμα

- Ποιο είναι το πρόβλημα με την πιο κάτω απόδειξη του $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$;

  Απόδειξη:

1.		$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$	προϋπόθεση
2.		$\exists x\, P(x)$	προϋπόθεση
3.	x_0	$P(x_0)$	υπόθεση
4.		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x_e$ 1
5.		$Q(x_0)$	$\rightarrow_e$ 4, 3
6.		$Q(x_0)$	$\exists x_e$ 2, 3-5
7.		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x_i$ 6

- Στη γραμμή 6 επιτράπηκε στην εσωτερική μεταβλητή x_0 να διαφύγει από το βεληνεκές της. Τέτοια λάθη μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα:

Παράδειγμα Λανθασμένης Απόδειξης

- Ποιο είναι το πρόβλημα με την πιο κάτω απόδειξη του

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\ \exists x\, P(x) \vdash \forall y\, Q(y)\ ;$$

Απόδειξη:

1.		$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	προϋπόθεση
2.		$\exists x\, P(x)$	προϋπόθεση
3.	x_0		
4.	x_0	$P(x_0)$	υπόθεση
5.		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x_e$ 1
6.		$Q(x_0)$	$\to_e$ 4, 5
7.		$Q(x_0)$	$\exists x_e$ 2, 4-6
8.		$\forall y\, Q(y)$	$\forall y_i$ 3-7

- Στη γραμμή 7 επιτράπηκε στην εσωτερική μεταβλητή x_0 να διαφύγει από το βεληνεκές της!

Ποσοτικές Ισοδυναμίες

- Όπως και στον Προτασιακό Λογισμό, γράφουμε $\phi \dashv\vdash \psi$ αν ισχύει ότι $\phi \vdash \psi$ και $\psi \vdash \phi$ και λέμε ότι οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- Μπορούμε να αποδείξουμε τις πιο κάτω ισοδυναμίες του Κατηγορηματικού Λογισμού.

1. $\neg\forall x\, \phi \dashv\vdash \exists x\, \neg\phi$
2. $\neg \exists x\, \phi \dashv\vdash \forall x\, \neg\phi$
3. $\forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi \dashv\vdash \forall x\, (\phi \wedge \psi)$
4. $\exists x\, \phi \vee \exists x\, \psi \dashv\vdash \exists x\, (\phi \vee \psi)$
5. $\forall x \forall y\, \phi \dashv\vdash \forall y \forall x\, \phi$
6. $\exists x\, \exists y\, \phi \dashv\vdash \exists y\, \exists x\, \phi$

Ποσοτικές Ισοδυναμίες

Εφόσον το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στο ψ

7. $\forall x\, \phi \wedge \psi \dashv\vdash \forall x\, (\phi \wedge \psi)$
8. $\forall x\, \phi \vee \psi \dashv\vdash \forall x\, (\phi \vee \psi)$
9. $\exists\, x\, \phi \wedge \psi \dashv\vdash \exists x\, (\phi \wedge \psi)$
10. $\exists x\, \phi \vee \psi \dashv\vdash \exists x\, (\phi \vee \psi)$
11. $\exists x\, (\phi \to \psi) \dashv\vdash \forall x\, \phi \to \psi$
12. $\forall x\, (\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \forall x\, \phi$
13. $\exists x\, (\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \exists x\, \phi$
14. $\forall x\, (\phi \to \psi) \dashv\vdash \exists x\, \phi \to \psi$

Απόδειξη Ισοδυναμίας 1

1.	$\neg\forall x\ \phi$	προϋπόθεση
2.	$\neg\exists x\ \neg\phi$	υπόθεση
3.	x_0	
4.	$\neg\phi[x_0/x]$	υπόθεση
5.	$\exists x\ \neg\phi$	$\exists x_i$ 4
6.	$\bot$	$\neg_e$ 5,2
7.	$\phi[x_0/x]$	
8.	$\forall x\ \phi$	
9.	$\bot$	
10.	$\exists x\ \neg\phi$	

Απόδειξη Ισοδυναμίας 1 (συν.)

1.	$\exists x\ \neg\phi$	προϋπόθεση
2.	$\forall x\ \phi$	υπόθεση
3.	x_0	
4.	$\neg\phi[x_0/x]$	υπόθεση
5.	$\phi[x_0/x]$	$\forall x_e$ 2
6.	$\bot$	$\neg_e$ 5,4
7.	$\bot$	$\exists x_e$ 1, 3-6
8.	$\neg\forall x\ \phi$	$\neg_i$ 2-7

Σημασιολογία Κατηγορηματικού Λογισμού

- Σημασιολογία – εναλλακτικός (και ισοδύναμος) χαρακτηρισμός ενός λογισμού
  – Προτασιακός Λογισμός: πίνακες αλήθειας
  – Κατηγορηματικός Λογισμός: μοντέλα
- Αποδεικτική Θεωρία – ασχολείται με την κατασκευή αποδείξεων λογικών επακόλουθων με τη χρήση αποδεικτικών κανόνων
  – Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα λογικό επακόλουθο δεν ισχύει;
  – «Θετικός» χαρακτηρισμός του λογισμού
- Σημασιολογία – Έστω ο συλλογισμός $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \vdash \varphi$
  – Για να δείξουμε ότι ένα λογικό επακόλουθο δεν είναι ορθό αρκεί να επιδείξουμε ένα «μοντέλο» όπου ο συλλογισμός δεν ισχύει
  – Για να δείξουμε ότι ισχύει αποδεικνύουμε ότι είναι ορθό με βάση τους κανόνες της σημασιολογίας.

Ερμηνείες (Interpretation)

- Ερμηνεία ή δομή για μια γλώσσα κατηγορηματικού λογισμού είναι η απόδοση εννοιών στα μη-λογικά σύμβολα που απαρτίζουν τη γλώσσα, δηλαδή, τα κατηγορήματα, τις συναρτήσεις και τις σταθερές. Πιο συγκεκριμένα:
- Ερμηνεία M μιας γλώσσας κατηγορηματικού λογισμού είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από
  - Ένα σύνολο A $\neq \varnothing$

    (το σύμπαν των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται η λογική γλώσσα)
  - Μια αντιστοίχιση ενός στοιχείου από το A σε κάθε σύμβολο σταθεράς της γλώσσας.

    Γράφουμε c^A για το στοιχείο που αντιστοιχείται στο σύμβολο c.
  - Μια αντιστοίχιση μιας συνάρτησης με n μεταβλητές σε κάθε σύμβολο συνάρτησης με n μεταβλητές της γλώσσας.

    Γράφουμε f^A για τη συνάρτηση που αντιστοιχείται στο σύμβολο f.
  - Μια αντιστοίχιση μιας σχέσης με n μεταβλητές σε κάθε σύμβολο κατηγορήματος με βαθμού n της γλώσσας.

    Γράφουμε R^A για τη σχέση που αντιστοιχείται στο σύμβολο R.

Παράδειγμα

- Έστω μια κατηγορηματική γλώσσα με δύο κατηγορηματικά σύμβολα δύο θέσεων *leq*, *eq* και δύο σύμβολα συναρτήσεων *m* και *p* (δύο θέσεων). Δυνατές ερμηνείες στη γλώσσα περιλαμβάνουν τις εξής:
  1. A = οι θετικοί ακέραιοι, *leq* = '≤', *eq* = '=', *m* = '-', *p* = '+'
  2. A = οι ακέραιοι, *leq* = '≤', *eq* = '=', *m* = '-', *p* = '+'
  3. A = το σύνολο όλων των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών , *leq* = '$\subseteq$', *eq* = '=', m = '-', p = '$\cup$'

Αν τώρα θεωρήσουμε τις προτάσεις

- $\phi = \forall x\ (p(x, x)\ eq\ x)$
- $\chi = \forall x\ \exists y\ p(y,y)\ leq\ x$
- $\psi = \forall x\ \exists y\ \ x\ leq\ y \wedge \neg\ (x\ eq\ y)$

παρατηρούμε ότι κάθε μια έχει διαφορετική σημασία και σε κάθε ερμηνεία παίρνει διαφορετικές τιμές αλήθειας.

Απονομές

- Έστω $V = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας Γ και μια ερμηνεία της Γ με σύμπαν αντικειμένων το A. Τότε απονομή ονομάζεται κάθε συνάρτηση $s:V \rightarrow A$.

- Μία απονομή μας επιτρέπει να δώσουμε ερμηνεία σε κάθε όρο t της γλώσσας μας. Ορίζουμε το s(t) με επαγωγή στους όρους ως εξής:
  - Αν $t = v$ τότε $s(t) = s(v)$
  - Αν $t = c$ τότε $s(t) = c^A$
  - Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι, τότε $s(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^A(s(t_1), \ldots, s(t_n))$

- Παράδειγμα. Έστω η γλώσσα Λ_A (διαφάνεια 3-6) και ερμηνεία με σύμπαν αντικειμένων A το σύνολο των φυσικών αριθμών, $=^A$ την ισότητα μεταξύ των φυσικών αριθμών, $\leq^A$ τη σχέση διάταξης στο N, $+^A$ και $\times^A$ η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των φυσικών και 0^A, 1^A οι φυσικοί αριθμοί 0 και 1. Έστω s: $V \rightarrow N$ η αποτίμηση $s(x_k) = 2k$. Τότε

$$s(x_1 \times x_2 + 1) = s(x_1 \times x_2) +^A s(1) = s(x_1) \times^A s(x_2) + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

Σημασιολογία - Η αλήθεια του Tarski

- Έστω ερμηνεία M και απονομή s. Ορίζουμε τι σημαίνει ο τύπος ϕ να ικανοποιείται στην ερμηνεία M βάσει της s, $M \models_s$, επαγωγικά ως εξής:
  - Αν $\phi = R(t_1,\ldots,t_n)$ τότε

    $M \models_s R(t_1,\ldots,t_n)$ αν και μόνο αν $R^M(s(t_1),\ldots,s(t_n))$
  - Αν $\phi = \neg\psi$ τότε

    $M \models_s \phi$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι $M \models_s \psi$ (ή $M \not\models_s \psi$)
  - Αν $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ τότε

    $M \models_s (\phi_1 \wedge \phi_2)$ αν και μόνο αν $M \models_s \phi_1$ και $M \models_s \phi_2$

    $M \models_s (\phi_1 \vee \phi_2)$ αν και μόνο αν $M \models_s \phi_1$ ή $M \models_s \phi_2$

    $M \models_s (\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ αν και μόνο αν $M \not\models_s \phi_1$ ή $M \models_s \phi_2$
  - Αν $\phi = \forall x\, \psi$ τότε

    $M \models_s \phi$ αν και μόνο αν $M \models_{s[x \mapsto a]} \psi$ για όλα τα $a \in A$, όπου

$$s[x \mapsto a](y) = \begin{cases} a & \text{if } y = x \\ s(y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - Αν $\phi = \exists x\, \psi$ τότε

    $M \models_s \phi$ αν και μόνο αν $M \models_{s[x \mapsto a]} \psi$ για κάποιο $a \in A$.

Παράδειγμα

- Έστω η ερμηνεία
  - Α το σύνολο των φυσικών αριθμών
  - eq η σχέση = σε αυτούς και leq η σχέση ≤ σε αυτούς.

- Η πρόταση $\forall x \forall y (eq(x,y) \rightarrow eq(y,x))$ ικανοποιείται στην ερμηνεία για οποιαδήποτε απονομή τιμών στις μεταβλητές της.

- Η πρόταση $x \text{ leq } y \wedge \neg (x \text{ eq } y)$ ικανοποιείται στην ερμηνεία με π.χ. απονομή τιμών s, όπου $s[x] = 1$ και $s[y] = 4$.

- Η πρόταση $\forall x \; \exists y \; (y \text{ leq } x \wedge \neg (x \text{ eq } y))$ δεν ικανοποιείται στην ερμηνεία αφού για $x = 0$ δεν υπάρχει καμία απονομή τιμής στη y που να κάνει την πρόταση $y \text{ leq } x \wedge \neg (x \text{ eq } y))$ αληθή.

Μοντέλα

- Θεώρημα: Αν ϕ είναι ένας τύπος που δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές (δηλαδή, είναι πρόταση) τότε η ικανοποιησιμότητά της δεν επηρεάζεται από την απονομή s. Σε τέτοια περίπτωση γράφουμε $M \models \phi$.

- Ορισμός: Αν Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων μιας κατηγορηματικής γλώσσας τότε μια ερμηνεία M ονομάζεται μοντέλο του Σ αν για κάθε $\phi \in \Sigma$ έχουμε ότι $M \models \phi$. Σε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η ϕ είναι αληθής στην ερμηνεία M.

- Έστω πρόταση ϕ μιας κατηγορηματικής γλώσσας Λ.
  - Η ϕ είναι ικανοποιήσιμη αν υπάρχει ερμηνεία της Λ και απονομή s που την κάνουν αληθή.
  - Η ϕ είναι έγκυρη αν είναι αληθής σε κάθε ερμηνεία και απονομή της Λ.

Παράδειγμα

- Να αποδείξετε ότι οι πιο κάτω τύποι είναι έγκυροι.
  1. $\forall x\ p(x) \rightarrow p(a)$
  2. $\forall x\ (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\ \psi)$, όπου η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερα στην πρόταση ϕ

Απόδειξη (1).

Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος δεν είναι έγκυρος. Τότε υπάρχει ερμηνεία M της γλώσσας για την οποία $M \models \forall x\ p(x)$ και $M \not\models p(a)$.

Εφόσον όμως $M \models \forall x\ p(x)$, για κάθε απονομή s και τιμή d,

$$M \models_{s[x \mapsto d]} p(x)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η πρόταση ισχύει και για x = a. Επομένως,

$$M \models_{s[x \mapsto a]} p(x) \text{ και } M \models p(a).$$

Αντίφαση!

Σημασιολογική Συνεπαγωγή

- Έστω τύποι $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n, \psi$. Τότε γράφουμε $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$ αν για κάθε μοντέλο M και απονομή s τέτοια ώστε $M \models_s \phi_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει επίσης ότι $M \models_s \psi$. Ονομάζουμε την $\models$ σημασιολογική συνεπαγωγή.

- Αν δύο προτάσεις ϕ_1, ϕ_2 είναι τέτοιες ώστε $\phi_2 \models \phi_1$ αν και μόνο αν $\phi_1 \models \phi_2$ τότε λέμε ότι είναι σημασιολογικά ισοδύναμες.

- Παραδείγματα: Οι πιο κάτω προτάσεις είναι σημασιολογικά ισοδύναμες.
  - $\forall x\, \phi \wedge \forall x\, \psi$ και $\forall x\, (\phi \wedge \psi)$
  - $\exists\, x\, \phi \vee \exists\, x\, \psi$ και $\exists x\, (\phi \vee \psi)$
  - $\forall x \forall y\, \phi$ και $\forall y \forall x\, \phi$
  - $\exists x\, \exists y\, \phi$ και $\exists y\, \exists x\, \phi$

Ορθότητα και Πληρότητα

- Θεώρημα: Έστω προτάσεις του Κατηγορηματικού Λογισμού ϕ_1, ϕ_2,…, ϕ_n και ψ. Τότε

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi.$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη της ορθότητας (ότι δηλαδή αν $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$ τότε $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$) αποδεικνύεται με επαγωγή στο μέγεθος της απόδειξης και ανάλυση όλων των κανόνων συμπερασμού της θεωρίας μας.

Η απόδειξη της Πληρότητας (το Θεώρημα Godel) βασίζεται στις έννοιες της συνέπειας και των κατασκευών Heskin.

Διαγνωσιμότητα

- Έστω πρόταση φ του Κατηγορηματικού Λογισμού. Ισχύει ότι $\models \phi$. Ναι ή όχι;

- Οι Alonzo Church και Alan Turing έχουν δείξει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να επιλύει αυτό το πρόβλημα.

- Κατά συνέπεια, ο Κατηγορηματικός Λογισμός είναι μη-διαγνώσιμος.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε τις πιο κάτω προτάσεις δεδομένου ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στο ψ

1. $\exists x\,(\phi \to \psi) \vdash \forall x\,\phi \to \psi$
2. $\exists x\,(\psi \to \phi) \vdash \psi \to \exists x\,\phi$

3. $\exists x\,(\phi \to \psi) \models \forall x\,\phi \to \psi$
4. $\exists x\,(\psi \to \phi) \models \psi \to \exists x\,\phi$

Υπολογισμός και Λογική

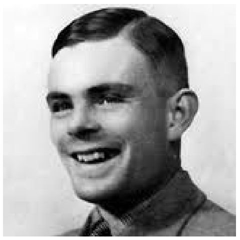
- Το όνειρο του Leibniz:
  - μια καθολική μαθηματική γλώσσα μέσω της οποίας να είναι δυνατή η διατύπωση κάθε ανθρώπινης γνώσης και κανόνες που μπορούν να εφαρμοστούν μηχανιστικά για την παραγωγή κάθε λογικής αλήθειας και σχέσης. "Calculemus" : Ας υπολογίσουμε!

- Το πρόγραμμα του David Hilbert
  - Η επινόηση ενός τυπικού συστήματος που θα επιτρέπει την απόδειξη κάθε μαθηματικής αλήθειας μέσω μιας μηχανικής διαδικασίας

- Alonzo Church και Alan Turing:
  - Υπάρχουν προβλήματα τα οποία κανένας αλγόριθμος δεν μπορεί να επιλύσει. Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει κάποιος αλγόριθμος ο οποίος να μπορεί να παραγάγει κάθε μαθηματική αλήθεια.


Leibniz, 1646–1716


Hilbert, 1862-1943


Turing, 1912-1954


Church 1903-1995

Resolution – Επίλυση

- Ο Κατηγορηματικός Λογισμός είναι μη διαγνώσιμος.
- Εντούτοις, υπάρχει αλγοριθμική μέθοδος μέσω της οποίας μπορούμε να δείξουμε ότι μια πρόταση του ΚΛ είναι μη ικανοποιήσιμη, η:
- Επίλυση
  - Κατάλληλη για χρήση από υπολογιστή (μόνο 1 κανόνας, 0 αξιώματα)
  - Δυνατόν να μην τερματίζει σε κάποια δεδομένα
- J. Alan Robinson 1965
  - Αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων (theorem proving)
- Λογικός Προγραμματισμός: Robert Kowalski
- Prolog: Alain Colmerauer 1973
- Prolog compiler: David Warren, 1997
- Constraint Logic Programming: Jaffar and Lassez, 1987

Διαδικασία Επίλυσης στον Κατηγορηματικό Λογισμό

•Απαραίτητη προεπεξεργασία αφορά στη μετατροπή των προτάσεων υπό μελέτη σε προτασιακή μορφή. Για κάθε πρόταση αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

- Μετατροπή πρότασης σε Κανονική Μορφή Prenex (ΚΜΡ) - συζευκτική κανονική μορφή με όλους τους ποσοδείκτες στην αρχή της πρότασης
- Απαλοιφή των υπαρξιακών ποσοδεικτών μέσω της μεθόδου του Skolem
- Διαγραφή των καθολικών ποσοδεικτών
- Εξαγωγή των προτασιακών συνόλων

Αλγόριθμος Μετατροπή σε ΚΜΡ

- Βήμα 1: Απαλοιφή συνεπαγωγών μέσω της ισοδυναμίας

$$\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$$

- Βήμα 2: Αφαίρεση διπλών αρνήσεων και μετακίνηση αρνήσεων στο επίπεδο των ατομικών προτάσεων μέσω των ισοδυναμιών

$$\neg\neg\phi \equiv \phi$$

$$\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$$

$$\neg\forall x\, \phi \equiv \exists x\, \neg\phi \qquad \neg\exists x\, \phi \equiv \forall x\, \neg\phi$$

- Βήμα 3: Μετονομασία δεσμευμένων μεταβλητών όπου χρειάζεται έτσι ώστε να μην υπάρχει το ίδιο όνομα μεταβλητής σε διαφορετικούς ποσοδείκτες.

- Βήμα 4: Μεταφορά όλων των ποσοδεικτών στα αριστερά

$$\forall x\, \varphi \wedge \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi) \qquad \forall x\, \varphi \vee \psi \equiv \forall x\, (\varphi \vee \psi)$$

$$\exists x\, \varphi \wedge \psi \equiv \exists x\, (\varphi \wedge \psi) \qquad \exists x\, \varphi \vee \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi)$$

(Σημείωση: εφόσον το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ψ.)

- Βήμα 5: Εισαγωγή συζεύξεων από διαζεύξεις

$$\phi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\phi \vee \psi_1) \wedge (\phi \vee \psi_2) \qquad (\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \phi \equiv (\psi_1 \vee \phi) \wedge (\psi_2 \vee \phi)$$

Παράδειγμα

Μετάτρεψε την πρόταση σε ΚΜΡ

$$\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \exists x\ Q(x)$$

1(a) $\neg\ (\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))\ ) \vee \exists x\ Q(x)$

1(b) $\neg\ (\forall x\ (\neg A(x) \vee\ B(x))\ ) \vee \exists x\ Q(x)$

2(a) $\exists x\ (\neg(\neg A(x) \vee B(x)))\ \vee \exists x\ Q(x)$

2(b) $\exists x\ (\neg\neg A(x) \wedge \neg\ B(x))\ \vee \exists x\ Q(x)$

2(c) $\exists x\ (A(x) \wedge \neg\ B(x))\ \vee \exists x\ Q(x)$

3 $\exists x\ (A(x) \wedge \neg\ B(x))\ \vee \exists y\ Q(y)$

4(a) $\exists x\ [(A(x) \wedge \neg\ B(x)))\ \vee \exists y\ Q(y)]$

4(b) $\exists x\ \exists y\ [(A(x) \wedge \neg\ B(x)))\ \vee Q(y)]$

5 $\exists x\ \exists y\ [(A(x) \vee Q(y)) \wedge (\neg\ B(x) \vee Q(y))]$

Μέθοδος του Skolem – Skolemization

- Thoralf Skolem
- Στόχος: Απαλοιφή των υπαρξιακών ποσοδεικτών
- Πετυχαίνεται με την εισαγωγή καινούριων σταθερών και συναρτήσεων στην πρόταση υπό μελέτη.
- Μέθοδος:
  - Για κάθε $\exists x$ που προηγείται όποιων $\forall y$: αντικατάσταση της μεταβλητής x από μια καινούρια σταθερά, π.χ.

    Η πρόταση $\exists x \forall y\, A(x,y)$ μετατρέπεται στην $\forall y\, A(c,y)$
  - Για κάθε $\exists x$ που έπεται των ποσοδεικτών $\forall y_1 \ldots \forall y_n$: αντικατάσταση της μεταβλητής x από μια καινούρια συνάρτηση f με παραμέτρους τις $y_1 \ldots \forall y_n$ π.χ.

    Η πρόταση $\forall x \exists y \forall z \exists w\, [A(x,y,z,w) \wedge B(y,w)]$

    μετατρέπεται στην $\forall x \forall z [A(x,f_1(x),z,f_2(x,z)) \wedge B(f_1(x),f_2(x,z))]$

Ορθότητα Μεθόδου του Skolem

- Βασική Ιδέα:
  - Η πρόταση $\exists x \forall y\ A(x,y)$ προβλέπει την ύπαρξη κάποιου αντικειμένου x που συνδέεται με κάθε αντικείμενο y μέσω της σχέσης A. Δεν ξέρουμε την ακριβή τιμή του x όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύμβολο σταθεράς για να το συμβολίσουμε. Έτσι η πρότασή μας μεταφράζεται σε $\forall y\ A(c,y)$.
  - Η πρόταση $\forall y\ \exists x\ A(x,y)$ προβλέπει για κάθε αντικείμενο y την ύπαρξη κάποιου αντικειμένου x για το οποίο ισχύει A(x,y). Η συγκεκριμένη τιμή του x εξαρτάται από το y. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη μιας συνάρτησης που για κάθε αντικείμενο y μας δίνει το αντικείμενο x με το οποίο συνδέεται το y. Έτσι η πρότασή μας μεταφράζεται σε $\forall y\ A(f(y),y)$.

Θεώρημα: Έστω πρόταση φ και ψ η πρόταση μετά από την εφαρμογή της μεθόδου Skolem. Τότε η πρόταση φ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν η πρόταση ψ είναι ικανοποιήσιμη.

Παράδειγμα

Να μετατρέψετε την πιο κάτω πρόταση σε προτασιακή μορφή.

$$\forall x \exists y (P(y) \rightarrow \neg Q(x,y))$$

1. $\forall x \exists y (\neg P(y) \vee \neg Q(x,y))$ — Μετατροπή σε ΚΜΡ
2. $\forall x (\neg P(f(x)) \vee \neg Q(x,f(x)))$ — Απαλοιφή υπαρξιακών ποσοδεικτών
3. $\neg P(f(x)) \vee \neg Q(x,f(x)))$ — Διαγραφή καθολικών ποσοδεικτών
4. $\{\{\neg P(f(x)), \neg Q(x,f(x))\}\}$ — Κατασκευή προτασιακού συνόλου

Ενοποίηση

- Ενοποίηση είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας εξετάζουμε αν τα στοιχεία ενός προτασιακού συνόλου μπορούν να γίνουν συντακτικά ταυτόσημα με τη χρήση μιας αντικατάστασης.

- Μια αντικατάσταση σ ονομάζεται ενοποιήτρια αντικατάσταση του προτασιακού συνόλου $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ αν είναι τέτοια ώστε $L_1\sigma = L_2\sigma = \ldots = L_n\sigma$. Το σύνολο καλείται ενοποιήσιμο.

- Γενικότερη ενοποιήτρια ενός προτασιακού συνόλου S ονομάζεται εκείνη η ενοποιήτρια σ για την οποία ισχύει ότι κάθε άλλη ενοποιήτρια θ του συνόλου μπορεί να γραφτεί ως επέκτασης της σ. Δηλαδή, υπάρχει αντικατάσταση σ’ τέτοια ώστε $\theta = \sigma\sigma'$.

Ενοποίηση

- Οποιοδήποτε ενοποιήσιμο σύνολο S έχει μια γενικότερη ενοποιήτρια.

- Κανόνες ενοποίησης όρων:
  – Μια σταθερά c είναι ενοποιήσιμη με τον όρο t αν είτε t=c είτε t=x όπου x οποιαδήποτε μεταβλητή. Δεν είναι ενοποιήσιμη με συναρτήσεις.
  – Μια μεταβλητή είναι ενοποιήσιμη με οποιοδήποτε όρο εκτός από συναρτήσεις που περιέχουν τη μεταβλητή.
  – Μια συνάρτηση είναι ενοποιήσιμη με μια άλλη συνάρτηση εφόσον οι δύο έχουν το ίδιο σύμβολο συνάρτησης και ενοποιήσιμους όρους.

Παράδειγμα

- Το σύνολο {P(x,c), P(b,c)} είναι ενοποιήσιμο με ενοποιήτρια αντικατάσταση την {b/x}.
- Το σύνολο {P(x,a), P(b,c)} δεν είναι ενοποιήσιμο.
- Το σύνολο {P(f(x),y), P(a,w)} δεν είναι ενοποιήσιμο.
- Το σύνολο {P(f(x),y), P(f(a),w)} είναι ενοποιήσιμο με ενοποιήτρια αντικατάσταση την {a/x, w/y}. Άλλη δυνατή ενοποιήτρια αντικατάσταση είναι η {a/x, b/y, b/w}. Η {a/x, w/y} είναι όμως η γενικότερη ενοποιήτρια {a/x, b/y, b/w} = {a/x, w/y} {b/w}.
- Το σύνολο {P(f(x)), P(x)} δεν είναι ενοποιήσιμο

Αλγόριθμος Ενοποίησης

Δεδομένο Εισόδου: Δύο όροι L_1 και L_2

Δεδομένο Εξόδου: ενοποιήτρια σ των όρων, αν υπάρχει.

1. $T_1 = L_1$; $T_2 = L_2$; $\sigma_0 = \{\}$; $i = 0$;
2. Αν τα $T_1 = T_2$ τότε τερμάτισε και επέστρεψε την σ_i ως τη γενικότερη ενοποιήτρια
3. Διαφορετικά, εντόπισε το αριστερότερο σημείο στο οποίο διαφέρουν τα T_1 και T_2. Αν τα δύο σημεία είναι μια μεταβλητή v_i και ένας όρος t_i ο οποίος δεν περιέχει τη μεταβλητή v_i τότε θέσε

   $\sigma_{i+1} = \sigma_i\{t_i/v_i\}$, $T_1 = T_1\{t_i/v_i\}$,

   και $T_2 = T_2\{t_i/v_i\}$
4. Διαφορετικά, τερμάτισε και ανάφερε ότι οι όροι δεν είναι ενοποιήσιμοι.
5. Θέσε $i = i + 1$ και επέστρεψε στο βήμα 2.

Παράδειγμα

Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Ενοποίησης στο πιο κάτω ζεύγος όρων:

$L_1 = f(x,g(x)) \qquad L_2 = f(h(y), g(h(z))$

1. $T_1 = f(x,g(x))$, $T_2 = f(h(y), g(h(z))$, $\sigma_0 = \{\}$, $i=0$
2. $\sigma_1 = \sigma_0\ \{h(y)/x\}$, $T_1 = f(h(y),g(h(y)))$, $T_2 = f(h(y), g(h(z))$
3. $\sigma_2 = \sigma_1\ \{y/z\}$, $T_1 = f(h(y),g(h(y)))$, $T_2 = f(h(y), g(h(y))$
4. Επέστρεψε τη $\sigma_2 = \{h(y)/x, y/z\}$ ως τη γενικότερη ενοποιήτρια των δύο όρων.

Επιλύουσες στον Κατηγορηματικό Λογισμό

- Στον Προτασιακό Λογισμό:
  - Ονομάζουμε δύο στοιχεία L και L' συμπληρωματικά αν L'= ¬L ή L= ¬L'
  - Έστω προτασιακά σύνολα C_1 και C_2 και συμπληρωματικά στοιχεία L_1 και L_2 τέτοια ώστε $L_1 \in C_1$ και $L_2 \in C_2$. Τότε το προτασιακό σύνολο $(C_1 - \{L_1\}) \cup (C_2 - \{L_2\})$ ονομάζεται επιλύουσα των C_1 και C_2 .
- Στον Κατηγορηματικό Λογισμό:
  - Ονομάζουμε δύο στοιχεία L και ¬L' συμπληρωματικά αν το σύνολο {L, L'} είναι ενοποιήσιμο
  - Έστω προτασιακά σύνολα C_1 και C_2 και συμπληρωματικά στοιχεία L_1 και L_2 τέτοια ώστε $L_1 \in C_1$ και $L_2 \in C_2$ με επιλύουσα σ. Τότε το προτασιακό σύνολο $(C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \cup (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$ ονομάζεται επιλύουσα των C_1 και C_2 .

Διαδικασία Επίλυσης για ΚΛ

- Αν το D είναι επιλύουσα των C_1 και C_2 τότε $C_1 \wedge C_2 \models D$.
- Η Διαδικασία Επίλυσης του ΚΛ εφαρμόζεται ακριβώς όπως και στον Προτασιακό Λογισμό (Διαφάνεια 4-12) με τη διαφορά ότι η επιλύουσα δύο προτασιακών συνόλων επιλέγεται μέσω της ενοποίησης τους.
- Θεώρημα Ορθότητας (Robinson): Αν ο όρος $\perp$ ληφθεί από ένα προτασιακό σύνολο κατά τη διαδικασία επίλυσης, τότε το σύνολο αυτό είναι μη ικανοποιήσιμο.
- Θεώρημα Πληρότητας: Αν ένα προτασιακό σύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο τότε ο όρος $\perp$ μπορεί να ληφθεί από τη διαδικασία της επίλυσης.

Παράδειγμα

1. Όλοι οι σκύλοι γαβγίζουν τα βράδια
2. Όποιος έχει γάτα δεν έχει ποντίκια.
3. Άνθρωποι που έχουν ελαφρύ ύπνο δεν έχουν ζώα που γαβγίζουν τις νύκτες.
4. Ο Γιάννης έχει γάτα ή σκύλο.

5. Συμπέρασμα: Αν ο Γιάννης ελαφρύ ύπνο τότε δεν έχει ποντίκια.

- Ισχύει το συμπέρασμα;

Παράδειγμα – Βήμα 1

- Βήμα 1: Γράψε τις προτάσεις σε γλώσσα κατηγορηματικού λογισμού.

1. Όλοι οι σκύλοι γαβγίζουν τα βράδια
   $\forall x\ (ΣΚ(x) \rightarrow ΓΤΒ(x))$
2. Όποιος έχει γάτα δεν έχει ποντίκια.
   $\forall x\ \forall y\ (ΕΧΕΙ\ (x,y) \land ΓΑ(y) \rightarrow \neg \exists z\ (ΕΧΕΙ(x,z) \land ΠΟ\ (z)))$
3. Άνθρωποι που έχουν ελαφρύ ύπνο δεν έχουν ζώα που γαβγίζουν τις νύκτες.
   $\forall x\ (ΕΥ(x) \rightarrow \neg \exists y\ (ΕΧΕΙ(x,y) \land ΓΤΒ(y)))$
4. Ο Γιάννης έχει γάτα ή σκύλο.
   $\exists x\ (ΕΧΕΙ\ (Γιάννης,x) \land (ΓΑ(x) \lor ΣΚ(x)))$
5. Συμπέρασμα: Αν ο Γιάννης ελαφρύ ύπνο τότε δεν έχει ποντίκια.
   $ΕΥ(Γιάννης) \rightarrow \neg \exists z\ (ΕΧΕΙ(Γιάννης,z) \land ΠΟ(z))$

Παράδειγμα – Βήμα 2

- Μετατροπή σε Κανονική Μορφή Prenex:

1. $\forall x\ (\Sigma K(x) \rightarrow \Gamma TB(x)) = \forall x\ (\neg\, \Sigma K(x) \lor \Gamma TB(x)\ )$

2. $\forall x\ \forall y\ (EXEI\ (x,y) \land \Gamma A(y) \rightarrow \neg\, \exists z\ (EXEI(x,z) \land \Pi O\ (z)))$
   $= \forall x\ \forall y\ (EXEI\ (x,y) \land \Gamma A\ (y) \rightarrow \forall z\, \neg\, (EXEI(x,z) \land \Pi O\ (z)))$
   $= \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\neg\, (EXEI\ (x,y) \land \Gamma A(y)) \lor \neg\, (EXEI(x,z) \land \Pi O\ (z)))$
   $= \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\neg\, EXEI(x,y) \lor \neg\, \Gamma A(y) \lor \neg\, EXEI(x,z) \lor \neg\, \Pi O(z))$

3. $\forall x\ (EY(x) \rightarrow \neg\, \exists y\ (EXEI\ (x,y) \land \Gamma TB(y)))$
   $= \forall x\ (EY(x) \rightarrow \forall\ y\, \neg\, (EXEI(x,y) \land \Gamma TB(y)))$
   $= \forall x\ \forall y\ (EY(x) \rightarrow \neg\, EXEI(x,y) \lor \neg\, \Gamma TB(y))$
   $= \forall x\ \forall y\ (\neg EY\ (x) \lor \neg\, EXEI(x,y) \lor \neg\, \Gamma TB(y))$

Παράδειγμα – Βήμα 2

4. $\exists x$ (ΕΧΕΙ (Γιάννης,x) $\wedge$ (ΓΑ(x) $\vee$ ΣΚ(x)))

5. $\neg$ [ΕΥ(Γιάννης) $\rightarrow$ $\neg$ $\exists z$ (ΕΧΕΙ(Γιάννης,z) $\wedge$ ΠΟ(z))]
   = $\neg$ [$\neg$ ΕΥ (Γιάννης) $\vee$ $\neg$ $\exists z$ (ΕΧΕΙ(Γιάννης, z) $\wedge$ ΠΟ(z))]
   = ΕΥ(Γιάννης) $\wedge$ $\exists z$ (ΕΧΕΙ(Γιάννης, z) $\wedge$ ΠΟ(z)))
   = $\exists z$ (ΕΥ(Γιάννης) $\wedge$ ΕΧΕΙ (Γιάννης,z) $\wedge$ ΠΟ(z))

Παράδειγμα – Βήμα 3

- Εφάρμοσε τη μέθοδο του Skolem στις κανονικές μορφές Prenex και κατασκεύασε την προτασιακή μορφή των προτάσεων:

1. ¬ ΣΚ(x) ∨ ΓΤΒ(x)
2. ¬ ΕΧΕΙ(x,y) ∨ ¬ ΓΑ(y) ∨ ¬ ΕΧΕΙ(x,z) ∨ ¬ ΠΟ(z)
3. ¬ΕΥ (x) ∨ ¬ ΕΧΕΙ(x,y) ∨ ¬ ΓΤΒ(y)
4. ΕΧΕΙ (Γιάννης,a) ∧ (ΓΑ(a) ∨ ΣΚ(a))
5. ΕΥ(Γιάννης) ∧ ΕΧΕΙ (Γιάννης,b) ∧ ΠΟ(b)

{{¬ ΣΚ(x), ΓΤΒ(x)},
{¬ ΕΧΕΙ(x,y), ¬ ΓΑ(y), ¬ ΕΧΕΙ(x,z), ¬ ΠΟ(z)},
{¬ΕΥ (x), ¬ ΕΧΕΙ(x,y), ¬ ΓΤΒ(y)},
{ΕΧΕΙ (Γιάννης,α)},{(ΓΑ(α), ΣΚ(α)},
{ΕΥ(Γιάννης)}, {ΕΧΕΙ (Γιάννης,b)}, {ΠΟ(b)}}

Παράδειγμα – Βήμα 4

- Εφάρμοσε τη μέθοδο της επίλυσης μέσω ενοποίησης.