Τροπικές Λογικές
(HR Κεφάλαιο 5.1-5.4)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής θέματα:

Βασικός Τροπικός Λογισμός – Σύνταξη και Σημασιολογία

Τρόποι Αλήθειας

Θεωρία της Αντιστοιχίας

Η Τροπική Λογική KT45 και το Σύστημα Συμπερασμού της

Τροπικές Λογικές

- Στον Προτασιακό και τον Κατηγοτηματικό Λογισμό μια πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής.

- Συχνά όμως είναι χρήσιμο να διαχωρίσουμε διαφορετικούς τρόπους αλήθειας, π.χ.
  - Η φ *είναι απαραίτητα* αληθής
  - Η φ *θεωρείται* αληθής
  - Η φ *πιστεύεται* ως αληθής
  - Η φ *θα γίνει αληθής* σε κάποια στιγμή στο μέλλον (χρονικές λογικές)

- Οι τροπικές λογικές είναι λογικές στις οποίες μπορούμε να μελετήσουμε τέτοιους τρόπους αλήθειας.

- Βρίσκουν εφαρμογές σε διάφορες περιοχές της Πληροφορική, π.χ. Τεχνητή Νοημοσύνη.

Βασικός Τροπικός Λογισμός – Σύνταξη

Ο Βασικός Τροπικός Λογισμός ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής:

$$\varphi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \leftrightarrow \varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

- Οι τελεστές □ και ◇ τυγχάνουν ερμηνείας με βάση την εφαρμογή που θεωρούμε. Συνήθεις ερμηνείες είναι
  - □ *φ* : *είναι απαραίτητο να ισχύει* η *φ*, ή η *φ είναι πάντα αληθής* και
  - ◇*φ* : *είναι δυνατό* η *φ* να γίνει αληθής, ή *κάποτε* η *φ* θα γίνει αληθής

Παραδείγματα

- Οι πιο κάτω προτάσεις είναι νόμιμες προτάσεις του Βασικού Τροπικού Λογισμού:
  - $p \rightarrow (\Box q \vee \neg \Diamond r)$
  - $\Box (\Diamond r \wedge (p \rightarrow (r \wedge \Diamond \neg q)))$

- Οι πιο κάτω προτάσεις δεν είναι νόμιμες:
  - $p \Box \rightarrow (q \vee \neg \Diamond r)$
  - $q \Box (\Diamond r \wedge p \rightarrow (r \wedge \Diamond \neg q))$

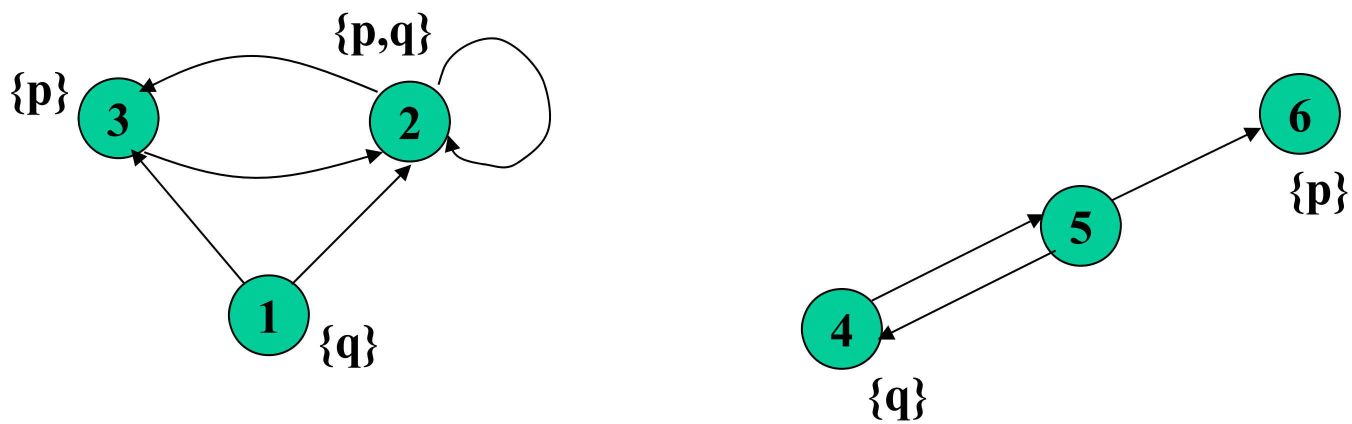
- Προτεραιότητα

$\neg$, $\Box$, $\Diamond$	↑ μεγαλύτερη προτεραιότητα
$\vee$, $\wedge$	|
$\rightarrow$, $\leftrightarrow$	↓ μικρότερη προτεραιότητα

Μοντέλα Kripke

- Ένα *μοντέλο Kripke* ορίζεται ως μια πλειάδα $M = (W, R, L)$ όπου
  - W είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο από *κόσμους*
  - $R \subseteq W \times W$ είναι μία σχέση προσβασιμότητας, όπου $(x, y) \in R$ αν ο κόσμος y είναι προσβάσιμος από τον κόσμο x
  - $L : S \rightarrow 2^{AP}$ είναι μια συνάρτηση η οποία συνδέει κάθε κόσμο με τις ατομικές προτάσεις τις οποίες ικανοποιεί.

- Παράδειγμα



Σημασιολογία (1)

- Ορίζουμε τη σχέση ||= όπου

> x ||= φ   αν και μόνο αν η ιδιότητα φ ικανοποιείται στον κόσμο x του μοντέλου M ως εξής:

x ||= T	και	x $\not\Vdash$ ⊥
x ||= p	αν και μόνο αν	p∈L(x)
x ||= ¬φ	αν και μόνο αν	δεν ισχύει ότι x ||= φ
x ||= φ∨ψ	αν και μόνο αν	(x ||= φ) ή (x ||= ψ)
x ||= □ φ	αν και μόνο αν	για κάθε y∈W τ.ω. (x,y) ∈ R ισχύει y ||=φ
x ||= ◇φ	αν και μόνο αν	υπάρχει y∈W τ.ω. (x,y) ∈ R και y ||=φ

Σημασιολογία (2)

- Για τους υπόλοιπους (παραγόμενους) τελεστές έχουμε:

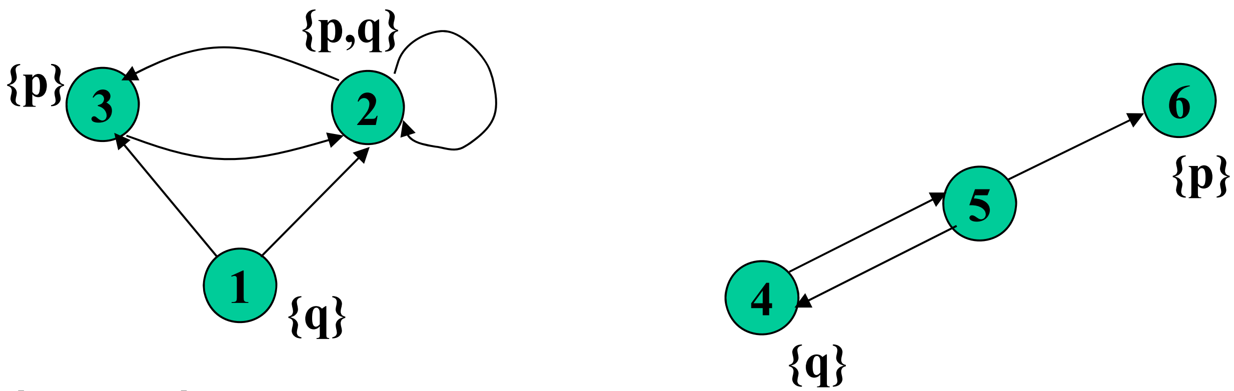
$x \Vdash \varphi \wedge \psi$	αν και μόνο αν	$(x \models \varphi)$ και $(x \models \psi)$
$x \Vdash \varphi \rightarrow \psi$	αν και μόνο αν	$x \models \neg \varphi \vee \psi$
$x \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	αν και μόνο αν	$x \models \varphi \rightarrow \psi$ και $x \models \psi \rightarrow \varphi$

- Ένα μοντέλο M = (W, R, L) *ικανοποιεί την ιδιότητα φ*, $M \models \varphi$, αν κάθε κατάσταση της δομής ικανοποιεί την ιδιότητα. Δηλαδή,

  $M \models \varphi$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in W$, $x \Vdash \varphi$.

Παράδειγμα

- Για το μοντέλο



έχουμε ότι

- 1 ||= q
- 1 ||= ◇q και 2 ||= ◇q
- 1 ||≠ □q
- 5 ||≠ □p, 5 ||≠ □q αλλά 5 ||= □(p∨q)
- 2, 3, 4, 5, 6 ||= □p → p
- 6 ||≠ ◇q, 6 ||= □p

Σχήματα Ιδιοτήτων

- Συχνά είναι χρήσιμο να μιλούμε για οικογένειες ιδιοτήτων που έχουν την ίδια *μορφή*. Ονομάζουμε αυτές τις οικογένειες *σχήματα ιδιοτήτων*. Μια ιδιότητα που έχει την ίδια μορφή με ένα σχήμα ονομάζεται *στιγμιότυπο* του σχήματος.

- Παράδειγμα: Οι πιο κάτω ιδιότητες αποτελούν στιγμιότυπα του σχήματος $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
  - $p \rightarrow \Box\Diamond p$
  - $q \rightarrow \Box\Diamond q$
  - $(\Box p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow \Box\Diamond (\Box p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$

- Ένα μοντέλο ικανοποιεί ένα σχήμα αν ικανοποιεί όλα τα στιγμιότυπα αυτού.

Λογική Συνεπαγωγή και Ισοδυναμία

- Έστω ένα σύνολο ιδιοτήτων Γ.
  - Το σύνολο Γ *συνεπάγεται λογικά* την ιδιότητα φ, $\Gamma \models \varphi$, αν σε κάθε κόσμο x οποιουδήποτε μοντέλου M, αν x $\Vdash \psi$ για κάθε $\psi \in \Gamma$, τότε x $\Vdash \varphi$.
  - Οι ιδιότητες φ και ψ είναι *ισοδύναμες* μεταξύ τους, αν ισχύει $\psi \models \varphi$ και $\varphi \models \psi$. Γράφουμε $\varphi \equiv \psi$.

- Ισοδυναμίες του Προτασιακού Λογισμού ισχύουν και στον Βασικό Τροπικό Λογισμό.

- Άλλες σχέσεις ιδιοτήτων περιλαμβάνουν τις:

$\Box T \equiv T$	$\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$
$\Diamond T \not\equiv T$	$\neg\Diamond\varphi \equiv \Box\neg\varphi$
$\Diamond\bot \equiv \bot$	$\Box(\varphi\wedge\psi) \equiv \Box\varphi \wedge \Box\psi$
$\Box\bot \not\equiv \bot$	$\Diamond(\varphi\vee\psi) \equiv \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$

Σημαντικά Σχήματα Ιδιοτήτων

- Μια ιδιότητα φ είναι έγκυρη αν είναι αληθής σε κάθε κόσμο οποιουδήποτε μοντέλου, δηλαδή, ισχύει ότι $\models \varphi$.

- Η πρόταση $\neg\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\neg\varphi$ είναι έγκυρη

  Απόδειξη:

  $x \Vdash \neg\Box\varphi$

  αν και μόνο αν δεν ίσχύει ότι $x \Vdash \Box\varphi$

  αν και μόνο αν δεν ίσχύει ότι για κάθε $(x,y) \in R$, $y \Vdash \varphi$

  αν και μόνο αν υπάρχει $(x,y) \in R$ τέτοιο ώστε όχι $y \Vdash \varphi$

  αν και μόνο αν υπάρχει $(x,y) \in R$ τέτοιο ώστε $y \Vdash \neg\varphi$

  αν και μόνο αν $x \Vdash \Diamond\neg\varphi$

Σημαντικά Σχήματα Ιδιοτήτων

- Το πιο κάτω σχήμα, το οποίο ονομάζεται K, είναι έγκυρο.

  $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

  Απόδειξη:

  Θα πρέπει να δείξουμε ότι αν $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ και $\Box\varphi$ τότε $\Box\psi$. (Η μόνη περίπτωση να μην είναι έγκυρο το σχήμα είναι να είναι αληθείς οι $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$ και $\Box\varphi$, και ψευδής η $\Box\psi$.)

  Έστω

  x $\Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \Box\varphi$

  τότε y $\Vdash \varphi \rightarrow \psi$ για κάθε (x,y) $\in$ R

  και y $\Vdash \varphi$ για κάθε (x,y) $\in$ R

  τότε y $\Vdash \varphi \rightarrow \psi$ και y $\Vdash \varphi$ για κάθε (x,y) $\in$ R

  τότε y $\Vdash \psi$ για κάθε (x,y) $\in$ R

  τότε x $\Vdash \Box\psi$

Σημαντικά Σχήματα Ιδιοτήτων

- Τα πιο κάτω σχήματα δεν είναι έγκυρα παρόλο που θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως αληθή σε διαφορετικές εκδοχές της Βασικής Τροπικής Λογικής (για διαφορετικές ερμηνείες του τρόπου αλήθειας)

  T: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

  4: $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

  5: $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

  D0: $\Diamond T$

  B: $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

Εξειδικεύσεις του ΒΤΛ (1)

- Ο Βασικός Τροπικός Λογισμός μπορεί να τύχει εξειδίκευσης με διάφορους τρόπους υποθέτοντας την *ορθότητα κάποιων αξιωμάτων* ή και *ιδιότητες της σχέσης προσβασιμότητας*.

  Πιο κάτω βλέπουμε κάποιους από αυτούς.

- *Αναγκαιότητα*

  $\Box\varphi$: Η φ είναι απαραίτητα αληθής

  $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$

  = δεν ισχύει ότι η άρνηση της φ είναι απαραίτητα αληθής

  = η φ είναι δυνατό να είναι αληθής

- *Πεποίθηση*

  $\Box\varphi$: Πιστεύω ότι η φ είναι αληθής

  $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$

  = δεν ισχύει ότι πιστεύω ότι η άρνηση της φ είναι αληθής

  = η φ είναι συμβατή με τις πεποιθήσεις μου

Εξειδικεύσεις του ΒΤΛ (2)

- *Γνώση*
  $\Box\varphi$: Γνωρίζω ότι η φ είναι αληθής
  $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$
  = δεν ισχύει ότι γνωρίζω ότι η άρνηση της φ είναι αληθής
  = σύμφωνα με όσα ξέρω η φ είναι αληθής

- *Ηθική υποχρέωση*
  $\Box\varphi$: Η φ οφείλει να είναι αληθής
  $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$
  = δεν ισχύει ότι η άρνηση της φ οφείλει να είναι αληθής
  = η φ είναι επιτρεπτό να είναι αληθής

Σχήματα και ερμηνείες του □

□φ	□φ → φ	□φ → □□φ	◇φ→ □◇φ	◇T	□φ → ◇φ
Η φ είναι απαραίτητα αληθής	✓	✓	✓	✓	✓
Πιστεύω ότι η φ είναι αληθής	×	✓	✓	✓	✓
Γνωρίζω ότι η φ είναι αληθής	✓	✓	✓	✓	✓
Η φ οφείλει να είναι αληθής	×	×	×	✓	✓

Τροπικές Λογικές και Μοντέλα Kripke

- Ας θεωρήσουμε την ερμηνεία του $\Box\varphi$ ως "γνωρίζω ότι η φ είναι αληθής".
  - Τότε θα πρέπει να ικανοποιείται το σχήμα $\Box\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}$
  - Εντούτοις, υπάρχουν μοντέλα Kripke στα οποία το σχήμα αυτό δεν ικανοποιείται.

- Ερώτημα: Ποια μοντέλα Kripke είναι κατάλληλα για να αποδώσουν τη συγκεκριμένη (ή οποιαδήποτε άλλη) ερμηνεία του τελεστή $\Box\varphi$;

- Εναλλακτικά: ποια χαρακτηριστικά πρέπει να έχει η σχέση προσβασιμότητας στα μοντέλα Kripke έτσι ώστε να αποδοθεί η έννοια της γνώσης;
  - R(x,y) αν y θα μπορούσε να ήταν ο «πραγματικός κόσμος» σύμφωνα με τις γνώσεις που υπάρχουν στον κόσμο x.

    Τότε, η φ είναι αληθής αν και μόνο αν η φ είναι αληθής σε όλους τους κόσμους που είναι προσβάσιμοι από τον κόσμο στον οποίο βρισκόμαστε.

Θεωρία της Αντιστοιχίας (1)

- Τα σχήματα ιδιοτήτων και η σχέση προσβασιμότητας έχουν στενή σχέση μεταξύ τους. Ξεκινούμε με δύο βοηθητικούς ορισμούς.

- *Πλαίσιο* ονομάζεται ένα ζεύγος F = (W, R) όπου W ένα σύνολο κόσμων και R μια σχέση προσβασιμότητας ανάμεσα στα στοιχεία του κόσμου αυτού.

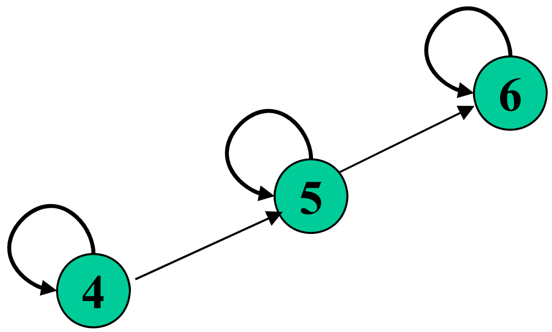
- Ένα πλαίσιο F = (W, R) ικανοποιεί μια ιδιότητα φ,

$$F \models \varphi$$

αν για κάθε συνάρτηση $L : S \rightarrow 2^{AP}$ και κάθε κόσμο $x \in W$, για M το μοντέλο (W,R,L), έχουμε ότι $M,x \Vdash \varphi$.

Παράδειγμα

- Για το πλαίσιο F:



έχουμε ότι

  - F $\Vert\!\!=$ □p → p
  - F $\Vert\!\!=$ □φ → φ
  - F $\not\Vert\!\!=$ □φ → □□φ

Προσβασιμότητα

Μπορούμε να θεωρήσουμε τις πιο κάτω ιδιότητες της σχέσης προσβασιμότητας ενός μοντέλου Kripke.

- Ανακλαστική: x R x, για κάθε $x \in W$
- Μεταβατική: Αν x R y και y R z τότε x R z
- Συμμετρική: Αν x R y τότε y R x
- Σειριακή: Για κάθε $x \in W$ υπάρχει $y \in W$ τ.ω. x R y.
- Ευκλείδεια: Αν x R y και x R z τότε y R z.

Θεωρία της Αντιστοιχίας (2)

- Θεώρημα: Έστω το πλαίσιο $F = (W, R)$. Τότε
  - Η σχέση R είναι ανακλαστική αν και μόνο αν $F \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$
  - Η σχέση R είναι συμμετρική αν και μόνο αν $F \models \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
  - Η σχέση R είναι μεταβατική αν και μόνο αν $F \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
  - Η σχέση R είναι σειριακή αν και μόνο αν $F \models \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
  - Η σχέση R είναι Ευκλείδεια αν και μόνο αν $F \models \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Απόδειξη (1)

- Θα αποδείξουμε το σκέλος (1) του θεωρήματος.

1. <u>Αν η σχέση R είναι ανακλαστική τότε $F \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$.</u>

   Ας υποθέσουμε ότι η R είναι ανακλαστική. Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε μοντέλο M και κόσμο x, $x \Vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$.

   Έστω μοντέλο M_0 και κόσμος x_0, και ας υποθέσουμε ότι $x_0 \Vdash \Box\varphi$. Αν $y_0 \in W$ είναι τέτοιο ώστε $(x_0, y_0) \in R$, τότε $y_0 \Vdash \varphi$. Από την ανακλαστικότητα του R, ισχύει επίσης ότι $(x_0, x_0) \in R$. Επομένως, $x_0 \Vdash \varphi$.

   Συμπεραίνουμε ότι $x_0 \Vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$.

Απόδειξη (2)

2. Αν F $|=$ $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ τότε η σχέση R είναι ανακλαστική.

   Θα αποδείξουμε την πρόταση με αντίφαση. Ας υποθέσουμε ότι το πλαίσιο F = (W, R) ικανοποιεί F $|=$ $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ αλλά η R δεν είναι ανακλαστική.

   Βάσει αυτού, πρέπει να υπάρχει κόσμος x τέτοιος ώστε $(x, x) \notin R$.

   Έστω μοντέλο M με συνάρτηση L τέτοια ώστε

   $p \in L(y)$ αν και μόνο αν $x \neq y$

   Έχουμε ότι στο μοντέλο αυτό ισχύει ότι

   $$x \mid\mid= \neg p \text{ και } x \mid\mid= \Box p.$$

   Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση και το ζητούμενο έπεται.

Ο Τροπικός Λογισμός S5

- Συγκεκριμένοι Τροπικοί Λογισμοί μπορούν να διατυπωθούν θεωρώντας ως αληθή διαφορετικά σχήματα ιδιοτήτων ανάλογα με το επιδιωκόμενο πεδίο εφαρμογής.
- Η λογική S5 (άλλως KT45) υποθέτει τα σχήματα {K, T, 4, 5}.
  - Χρησιμοποιείται για ανάλυση συστημάτων γνώσης.
  - Ο κατασκευαστής $\Box$ ερμηνεύεται ως «Γνωρίζω ότι…» και τα αξιώματα που χρησιμοποιούνται διατυπώνουν ότι
  - $T = \Box\varphi \rightarrow \varphi$

  Αλήθεια: Αν γνωρίζω κάποιο γεγονός τότε αυτό είναι αληθές
  - $4 = \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

  Θετική ενδοσκόπηση: Αν γνωρίζω κάποιο γεγονός τότε γνωρίζω ότι το γνωρίζω.
  - $5 = \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

  Αρνητική ενδοσκόπηση: Αν δεν γνωρίζω κάποιο γεγονός τότε γνωρίζω ότι δεν το γνωρίζω.

Ο Τροπικός Λογισμός S5

- $K = \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Το σχήμα K εκφράζει τη *λογική παντογνωσία*: εκφράζει ότι η γνώση κάποιου είναι κλειστή ως προς τη λογική συνεπαγωγή.

- Η λογική S5 επισημοποιεί μια *εξιδανικευμένη έννοια της γνώσης*.

Συνεπαγωγή και Συμπερασμός

- Έστω L τα αποδεκτά σχήματα μιας τροπικής λογικής και Γ ένα σύνολο από ιδιότητες της λογικής αυτής. Ορίζουμε τη σχέση $\Gamma \models_L \psi$ και λέμε ότι το Γ συνεπάγεται λογικά την ψ στη γλώσσα L αν και μόνο αν $\Gamma \cup L \models \psi$.

- Για να αποφασίσουμε κατά πόσο $\Gamma \cup L \models \psi$, από τον ορισμό της σχέσης $\models$, πρέπει να ισχύει ότι σε κάθε μοντέλο και κάθε κόσμο όπου ικανοποιούνται οι προτάσεις $\Gamma \cup L$ ικανοποιείται και η πρόταση ψ.

- Για να το πετύχουμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύνολο από κανόνες Λογικού Συμπερασμού όπως και στον Προτασιακό/Κατηγορηματικό Λογισμό.

Λογικός Συμπερασμός για την S5

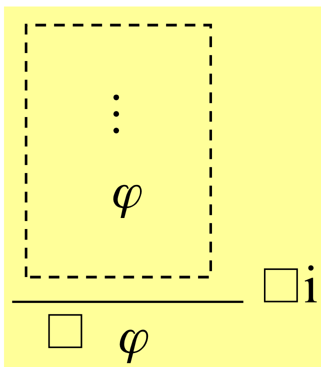
- Το σύστημα Λογικού Συμπερασμού του λογισμού S5 αποτελείται από τους Κανόνες Συμπερασμού του Προτασιακού Λογισμού σε συνδυασμό με τους κανόνες που ακολουθούν.

- Γράφουμε $\models_K \psi$ αν η ψ μπορεί να αποδειχθεί στο σύστημα κανόνων της S5.

$$\frac{\Box\phi}{\phi}\; T \qquad \frac{\Box\phi}{\Box\Box\phi}\; 4 \qquad \frac{\neg\Box\phi}{\Box\neg\Box\phi}\; 5$$

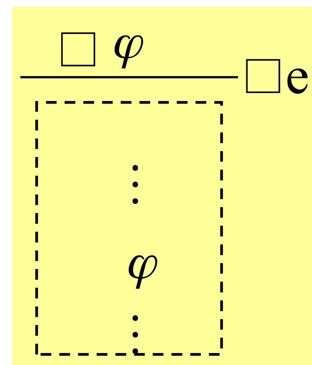
Λογικός Συμπερασμός για την S5

- Επιπρόσθετα έχουμε δύο κανόνες για εισαγωγή και απαλοιφή του □φ.
- Τα κουτιά χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ότι βρισκόμαστε σε κάποιο τυχαίο κόσμο για τον οποίο δεν υπάρχει καμιά υπόθεση.
- Κανόνας Εισαγωγής □



- Εξήγηση Κανόνα: Αν σε κάποιο τυχαίο κόσμο ισχύει η φ τότε η □ φ ισχύει έξω από το κουτί.

- Κανόνας Απαλοιφής □



- Εξήγηση Κανόνα: Αν □ φ είναι αληθής, τότε μπορούμε να υποθέσουμε τη φ σε οποιοδήποτε κουτί/κόσμο.

Παράδειγμα

- $\models_K (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

1.	$\Box p \wedge \Box q$	προϋπόθεση
2.	$\Box p$	$\wedge e_1$ 1
3.	$\Box q$	$\wedge e_2$ 1
4.	p	$\Box e$ 2
5.	q	$\Box e$ 3
6.	$p \wedge q$	$\wedge i$ 4,5
7.	$\Box(p \wedge q)$	$\Box e$ 6
8.	$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	$\rightarrow i$ 1-8

Συστήματα Πολυ-πρακτόρων

- Σε ένα σύστημα πολυ-πρακτόρων, διαφορετικοί πράκτορες έχουν διαφορετική γνώση για τον κόσμο που τους περιβάλλει.

- Κάθε πράκτορας διενεργεί συλλογισμούς για τον κόσμο αυτό (συμπεριλαμβανομένων και των γνώσεων άλλων πρακτόρων) βάσει των γνώσεων που κατέχει.

- Εφαρμογές σε παιχνίδια, στα Οικονομικά, στην Ρομποτική, στην Κρυπτογραφία, σε πρωτόκολλα, κλπ.

Το Πρόβλημα των Σοφών

- Υπάρχουν 3 κόκκινα καπέλα και 2 άσπρα καπέλα. Ο βασιλιάς τοποθετεί τρία από τα καπέλα αυτά στα κεφάλια 3 σοφών χωρίς αυτοί να δουν το καπέλο που φορούν.

  Στη συνέχεια τους ρωτά τι χρώμα είναι το καπέλο που φορούν.

  Ο πρώτος απαντά ότι δεν γνωρίζει.

  Ο δεύτερος απαντά ότι επίσης δεν γνωρίζει.

  Τι θα απαντήσει ο τρίτος σοφός;

- Ο τρίτος σοφός θα απαντούσε ότι φορά κόκκινο καπέλο: Ας υποθέσουμε ότι φορά άσπρο καπέλο:
  - Αν ένας από τους άλλους δύο επίσης φορά άσπρο καπέλο τότε ο τρίτος βλέποντας τα 2 άσπρα καπέλα θα γνώριζε ότι φορά κόκκινο καπέλο. Επομένως οι άλλοι δύο πρέπει να φορούν κόκκινα καπέλα. Όμως σε τέτοια περίπτωση, με την απάντηση του πρώτου σοφού ότι δεν γνωρίζει το χρώμα του καπέλου του ο δεύτερος σοφός θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι δεν φορά άσπρο καπέλο και θα απαντούσε ότι γνωρίζει το χρώμα του καπέλου του. Αντίφαση!

Το Πρόβλημα των Λασπωμένων Παιδιών

- Μια ομάδα από παιδιά παίζουν στον κήπο. Κάποια από αυτά λερώνουν το πρόσωπό τους με λάσπη. Έστω $k \geq 1$ ο αριθμός των λασπωμένων παιδιών. Κάθε παιδί μπορεί να δει τη λάσπη στα πρόσωπα των άλλων παιδιών αλλά όχι στο δικό του.

  Ο πατέρας τους λέει πως κάποιος από αυτούς έχει λάσπη στο πρόσωπο και ρωτά κατά πόσο κάποιο παιδί γνωρίζει αν έχει λάσπη στο πρόσωπο. Την πρώτη φορά, όλα τα παιδιά απαντούν πως όχι. Ο πατέρας επαναλαμβάνει την ερώτηση και τα παιδιά συνεχίζουν να απαντούν πως όχι. Όμως, μετά από k επαναλήψεις της ερώτησης τα k λερωμένα παιδιά απαντούν πως ναι.

- Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τροπικό λογισμό που μας επιτρέπει να επιχειρηματολογούμε για τέτοια προβλήματα.

Ο Λογισμός $KT45^n$

- Ο Λογισμός $KT45^n$ αποτελεί επέκταση του S5 για συστήματα πολύ-πρακτόρων.
- Έστω $A = \{1,2,\ldots,n\}$ ένα σύνολο από πράκτορες.
- Ο Λογισμός $KT45^n$
  - Περιέχει n κατασκευαστές τύπου $\Box$, ένα για κάθε πράκτορα του A. Τους συμβολίζουμε ως K_i για κάθε $i \in A$, όπου το K τονίζει το γεγονός ότι ο τελεστής $\Box$ αντιπροσωπεύει γνώση (knowledge). Γράφοντας $K_i\,\varphi$ εννοούμε ότι ο πράκτορας i γνωρίζει το φ. Παρόμοια, η πρόταση $K_1\, p \wedge K_1 \neg K_2 K_1\, p$ δηλώνει ότι ο πράκτορας 1 γνωρίζει το p αλλά επίσης γνωρίζει ότι ο πράκτορας 2 δεν γνωρίζει ότι το γνωρίζει.
  - Περιέχει τον κατασκευαστή $E_G\, p$ όπου $G \subseteq A$ ο οποίος εκφράζει ότι όλα τα στοιχεία του G γνωρίζουν το p.
  - Περιέχει τον κατασκευαστή $C_G\, p$ όπου $G \subseteq A$ ο οποίος εκφράζει ότι όλα τα στοιχεία του G γνωρίζουν το p και κάθε ένας γνωρίζει ότι όλοι το γνωρίζουν, και ό καθένας ξέρει ότι όλοι το γνωρίζουν, ….
  - Περιέχει τον κατασκευαστή $D_G\, p$ όπου $G \subseteq A$ ο οποίος εκφράζει ότι η γνώση p βρίσκεται κατανεμημένη ανάμεσα στους πράκτορες G.

Σύνταξη

Ο Λογισμός $KT45^n$ ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής:

$$\varphi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \leftrightarrow \varphi \mid K_i\ \varphi \mid E_G\ \varphi \mid C_G\ \varphi \mid D_G\ \varphi \mid$$

Μοντέλα του $KT45^n$

- Ένα *μοντέλο του λογισμού $KT45^n$* ορίζεται ως μια πλειάδα $M = (W, (R_i)_{i \in A}, L)$ όπου
  - W είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο από *κόσμους*
  - Για κάθε $i \in A$, $R_i \subseteq W \times W$ είναι η σχέση προσβασιμότητας για τον πράκτορα i η οποία είναι σχέση ισοδυναμίας
  - $L : S \rightarrow 2^{AP}$ είναι μια συνάρτηση η οποία συνδέει κάθε κόσμο με τις ατομικές προτάσεις τις οποίες ικανοποιεί.

- Παράδειγμα

Σημασιολογία

- Ορίζουμε τη σχέση $\|\!=$ όπου

> $x \|\!= \varphi$ αν και μόνο αν η ιδιότητα φ ικανοποιείται στον κόσμο x του μοντέλου $M = (W, (R_i)_{i\in A}, L)$ ως εξής:

…

$x \|\!= K_i \varphi$	αν και μόνο αν	για κάθε $y \in W$ τ. ω. $(x,y) \in R_i$ ισχύει $y \|\!= \varphi$
$x \|\!= E_G \varphi$	αν και μόνο αν	για κάθε $i \in R$ ισχύει $x \|\!= K_i \varphi$
$x \|\!= C_G \varphi$	αν και μόνο αν	για κάθε $k \geq 1$ ισχύει $x \|\!= E_G^k \varphi$ όπου $E_G^k \varphi = \underbrace{E_G E_G \ldots E_G}_{\text{k φορές}} \varphi$
$x \|\!= \Delta_G \varphi$	αν και μόνο αν	για κάθε $y \in W$ τέτοιο ώστε $(x,y) \in R_i$ για κάθε $i \in A$, ισχύει $y \|\!= \varphi$

Ο Λογισμός $KT45^n$

- Έγκυρες προτάσεις (σχήματα) του $KT45^n$ περιλαμβάνουν τις πιο κάτω
  - $(K_i\, \varphi \wedge K_i\, (\varphi \rightarrow \psi)\,) \rightarrow K_i\, \psi$
  - $(E_G\, \varphi \wedge E_G\, (\varphi \rightarrow \psi)\,) \rightarrow E_G\, \psi$
  - $(C_G\, \varphi \wedge C_G\, (\varphi \rightarrow \psi)\,) \rightarrow C_G\, \psi$
  - $(D_G\, \varphi \wedge D_G\, (\varphi \rightarrow \psi)\,) \rightarrow D_G\, \psi$

- Οι κανόνες του Λογικού Συμπερασμού του $KT45^n$ λαμβάνονται επεκτείνοντας τους κανόνες του Λογικού Συμπερασμού του S5.
  (Huth and Ryan, Chapter 5.5.3)

Μοντελοποίηση του Προβλήματος των Σοφών

- Έστω p_i η πρόταση «Ο σοφός i φορά κόκκινο καπέλο» και $\neg p_i$ η πρόταση «Ο σοφός i φορά άσπρο καπέλο».

- Τα στοιχεία του προβλήματος μπορούν να διατυπωθούν ως το πιο κάτω σύνολο ιδιοτήτων του $KT45^n$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma = \{ & C(p_1 \vee p_2 \vee p_3), \\
& C(p_1 \to K_2\, p_1),\ C(\neg\, p_1 \to K_2 \neg\, p_1) \\
& C(p_1 \to K_3\, p_1),\ C(\neg\, p_1 \to K_3 \neg\, p_1) \\
& C(p_2 \to K_1\, p_2),\ C(\neg\, p_2 \to K_1 \neg\, p_2) \\
& C(p_2 \to K_3\, p_2),\ C(\neg\, p_2 \to K_3 \neg\, p_2) \\
& C(p_3 \to K_1\, p_3),\ C(\neg\, p_3 \to K_1 \neg\, p_3) \\
& C(p_3 \to K_2\, p_3),\ C(\neg\, p_3 \to K_2 \neg\, p_3) \quad \}
\end{aligned}
$$

Λύση του προβλήματος

- Για να δείξουμε ότι ο τρίτος σοφός γνωρίζει ότι το καπέλο του είναι κόκκινο πρέπει να αποδείξουμε τις πιο κάτω συνεπαγωγές:

1. $\Gamma, C(\neg K_1\, p_1 \wedge \neg\, K_1 \neg p_1) \models C(p_2 \vee p_3)$

2. $\Gamma, C(p_2 \vee p_3), C(\neg K_2\, p_2 \wedge \neg\, K_2 \neg p_2) \models K_3\, p_3$

- Η αποδείξεις μπορούν να γίνουν βάσει των Κανόνων Λογικού Συμπερασμού του $K45^n$.