

---

# CTL - Λογική Δένδρου Υπολογισμού

(HR Κεφάλαιο 3.4)

---

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής θέματα:

*Διακλαδωμένες Χρονικές λογικές*

*CTL – σύνταξη και ερμηνεία*

*Έλεγχος μοντέλου για τη CTL*

*Σύγκριση των PLTL και CTL*

# Γραμμική και διακλαδωμένη χρονική λογική

---

- Γραμμική χρονική λογική:

οι ιδιότητες αναφέρονται σε (και ελέγχουν) *όλες τις δυνατές εκτελέσεις* ενός μοντέλου

π.χ. η δομή Kripke  $M$  ικανοποιεί την ιδιότητα  $x < 15 \ \mathbf{U} \ x = 100$  αν σε *κάθε* εκτέλεση της δομής ισχύει ότι  $x < 15$  μέχρις ότου το  $x$  πάρει την τιμή 100.

- Διακλαδωμένη χρονική λογική:

οι ιδιότητες αναφέρονται και ελέγχουν *τη δενδρική δομή* του μοντέλου,

π.χ. η δομή Kripke  $M$  ικανοποιεί την ιδιότητα  $A \ (x < 15 \ \mathbf{U} \ x = 100)$  αν σε κάθε εκτέλεση της δομής ισχύει ότι  $x < 15$  μέχρις ότου το  $x$  πάρει την τιμή 100, και,

η δομή Kripke  $M$  ικανοποιεί την ιδιότητα  $E \ (x < 15 \ \mathbf{U} \ x = 100)$  αν υπάρχει εκτέλεση της δομής όπου ισχύει ότι  $x < 15$  μέχρις ότου το  $x$  πάρει την τιμή 100.

# Γιατί διακλαδωμένη χρονική λογική;

---

- *Εκφραστικότητα*: μας δίνει τα μέσα να εκφράσουμε διαφορετική κατηγορία ιδιοτήτων. Για παράδειγμα τη δυνατότητα (και όχι την αναγκαιότητα) να συμβεί κάτι.
  - Ισχύει όμως και το αντίθετο: υπάρχουν ιδιότητες γραμμικών λογικών που δεν μπορούν να εκφραστούν σε διακλαδωμένη λογική.
- *Πολυπλοκότητα μοντελοελέγχου*: Διαφορετικοί αλγόριθμοι για αυτοματοποιημένη επαλήθευση με διαφορετική πολυπλοκότητα χρόνου και χώρου.

# Διακλαδωμένες χρονικές λογικές

---

- Διακλαδωμένες χρονικές λογικής που έχουν προταθεί περιλαμβάνουν
  - Λογική Hennessy – Milner (HML)
  - Λογική Δένδρου Υπολογισμού (Computation Tree Logic – CTL)
  - Επεκταμένη Λογική Δένδρου Υπολογισμού – CTL\*  
(συνδυάζει σε ένα πρότυπο τις CTL και PLTL)
  - $\mu$ -calculus χωρίς εναλλαγή
  - $\mu$ -calculus

# Προτασιακή γραμμική χρονική λογική

---

- Η Προτασιακή Γραμμική Χρονική Λογική ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται από τους πιο κάτω κανόνες
  - κάθε ατομική πρόταση  $p$  είναι ιδιότητα
  - Αν οι  $\Phi$  και  $\Psi$  είναι ιδιότητες, τότε και οι  $\neg\Phi$  και  $\Phi \vee \Psi$  είναι ιδιότητες
  - Αν η  $\Phi$  είναι μια ιδιότητα, τότε και η  $X \Phi$  (next) είναι ιδιότητα
  - Αν οι  $\Phi$  και  $\Psi$  είναι ιδιότητες, τότε και η  $\Phi U \Psi$  (until) είναι ιδιότητα

*Πως μπορούμε να εκφράσουμε ότι σε κάθε δυνατή εκτέλεση είναι πάντα δυνατή η επιστροφή στην αρχική κατάσταση;*

$G F \text{ start};$

# Προτασιακή διακλαδωμένη χρονική λογική

---

- Επεκτείνουμε την PLTL με ποσοτικούς τελεστές μονοπατιών
  - **A** , όπου **A**  $\varphi$  σημαίνει ότι η ιδιότητα  $\varphi$  ικανοποιείται σε όλες τις εκτελέσεις (μονοπάτια) του μοντέλου
  - **E** , όπου **E**  $\varphi$  σημαίνει ότι υπάρχει εκτέλεση του μοντέλου που ικανοποιεί την ιδιότητα  $\varphi$
- Ιδιότητες του τύπου **A**  $\varphi$  και **E**  $\varphi$  ονομάζονται *ιδιότητες κατάστασης* (state formulae).
- PLTL ιδιότητες ονομάζονται *ιδιότητες εκτέλεσης* (path formulae).

*Πως μπορούμε να εκφράσουμε ότι σε κάθε δυνατή εκτέλεση είναι πάντα δυνατή η επιστροφή στην αρχική κατάσταση; **AG EF start!***

# CTL (Computation Tree Logic)

---

Η CTL ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο ιδιοτήτων που παράγονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \Phi, \Psi &::= p \mid \neg\Phi \mid \Phi \vee \Psi \mid \mathbf{A} \varphi \mid \mathbf{E} \varphi \\ \varphi &::= \mathbf{X} \Phi \mid \Phi \mathbf{U} \Psi \mid \mathbf{F} \Phi \mid \mathbf{G} \Phi \end{aligned}$$

## 1. Ιδιότητες κατάστασης – $\Phi$

- κάθε ατομική πρόταση  $p$  είναι ιδιότητα *κατάστασης*
- Αν οι  $\Phi$  και  $\Psi$  είναι ιδιότητες *κατάστασης*, τότε και οι  $\neg\Phi$  και  $\Phi \vee \Psi$  είναι ιδιότητες *κατάστασης*
- Αν η  $\varphi$  είναι μια ιδιότητα *εκτέλεσης*, τότε οι  $\mathbf{A} \varphi$  και η  $\mathbf{E} \varphi$  είναι ιδιότητες *κατάστασης*

## 2. Ιδιότητες εκτέλεσης – $\varphi$

- Αν οι  $\Phi$  και  $\Psi$  είναι ιδιότητες *κατάστασης*, τότε οι  $\mathbf{X} \Phi$  και  $\Phi \mathbf{U} \Psi$  είναι ιδιότητες *εκτέλεσης*

## Παραγόμενοι τελεστές

---

$$\mathbf{F} \Phi \equiv \text{true} \mathbf{U} \Phi$$

$$\mathbf{G} \Phi \equiv \neg \mathbf{F} \neg \Phi$$

$$\mathbf{EF} \Phi \equiv \mathbf{E}(\text{true} \mathbf{U} \Phi) \quad \text{δυνατόν } \Phi$$

$$\mathbf{AG} \Phi \equiv \neg \mathbf{EF} \neg \Phi \quad \text{σταθερά } \Phi$$

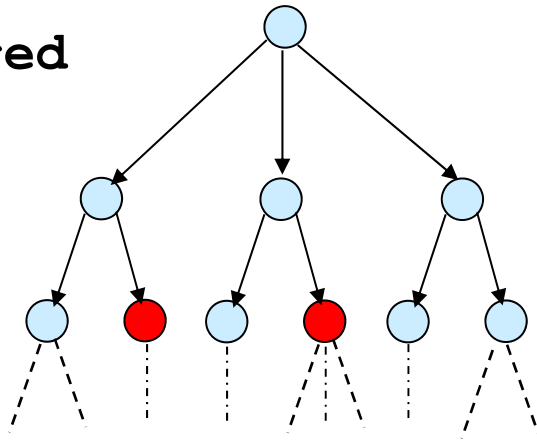
$$\mathbf{AF} \Phi \equiv \mathbf{A}(\text{true} \mathbf{U} \Phi) \quad \text{αναπόφευκτα } \Phi$$

$$\mathbf{EG} \Phi \equiv \neg \mathbf{AF} \neg \Phi \quad \text{δυνατόν πάντα } \Phi$$

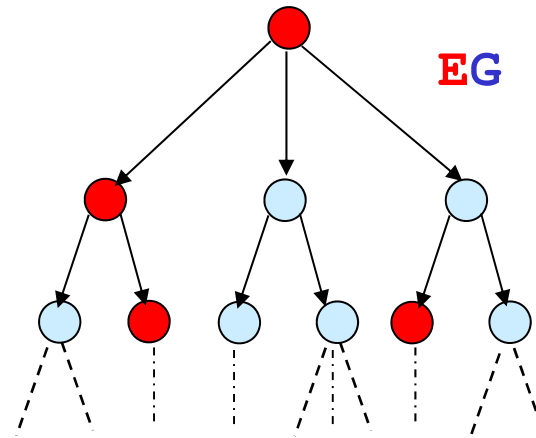


# Παράδειγμα

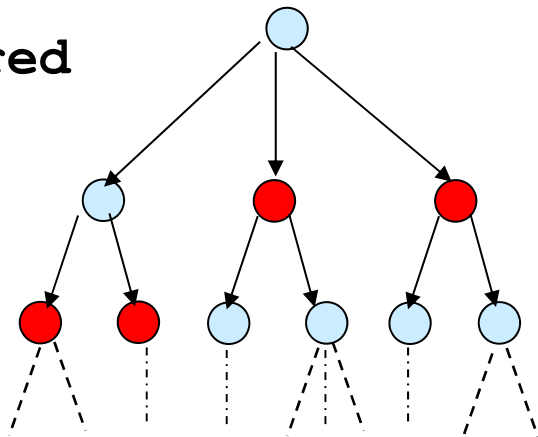
**EF** red



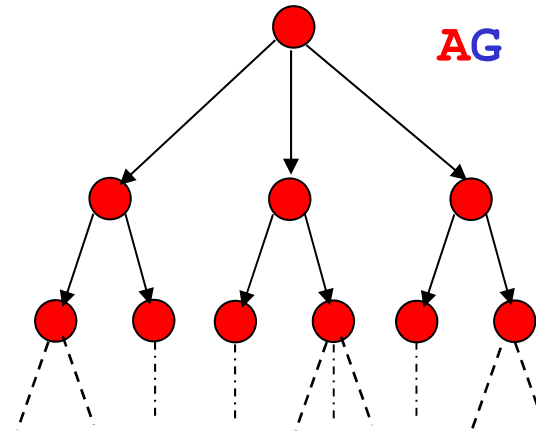
**EG** red



**AF** red



**AG** red



# Παραδείγματα

---

- Έστω ΑΠ οι ατομικές προτάσεις που αφορούν τη μεταβλητή  $x$ , τους τελεστές  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  και  $=$ , και η συνάρτηση  $x+c$
- Οι πιο κάτω ιδιότητες είναι νόμιμες CTL ιδιότητες
  - $\neg (x + 7 < 21) \vee (x = 32)$
  - **AF**  $(x + 12 < 30)$
  - **EG**  $(x \geq 0 \wedge x < 20)$
  - $x = 10 \rightarrow$  **AX E**  $(x \geq 11 \text{ U } x = 0)$
- Οι πιο κάτω ιδιότητες δεν είναι νόμιμες
  - **E**  $(\text{F } (\text{G } x < 10) \wedge (\text{G } (x + 12 > y)))$
  - **E**  $(x < 21) \vee \text{X } (x = 32)$

# Ερμηνεία της CTL

---

- Η τυπική ερμηνεία της CTL δίνεται (και πάλι) σε σχέση με τις δομές Kripke.
- Μια *δομή Kripke* ορίζεται ως μια πλειάδα  $M = (S, R, I, \text{Label})$  όπου
  - $S$  είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο από καταστάσεις
  - $I \subseteq S$  είναι το σύνολο των αρχικών καταστάσεων
  - $R \subseteq S \times S$  είναι μία σχέση μεταβάσεων, όπου  $(s, s') \in R$  αν υπάρχει μετάβαση από την κατάσταση  $s$  στην κατάσταση  $s'$
  - $\text{Label} : S \rightarrow 2^{AP}$  είναι μια συνάρτηση η οποία συνδέει κάθε κατάσταση με τις ατομικές προτάσεις τις οποίες ικανοποιεί.
- Έστω μια κατάσταση  $s \in S$ . Τότε,  $\text{Label}(s)$  είναι το σύνολο των ατομικών προτάσεων που ισχύουν στην κατάσταση  $s$ .
- Ονομάζουμε μια ακολουθία από καταστάσεις  $s_0 s_1 s_2 \dots$  *μονοπάτι* αν  $s_0$  είναι μια αρχική κατάσταση και  $(s_i, s_{i+1}) \in R$  για κάθε  $i \geq 0$ .

# Σημασιολογία της CTL: ιδιότητες κατάστασης

- Ορίζουμε τη σχέση  $\models$  όπου

$M, s \models \Phi$  αν και μόνο αν η ιδιότητα  $\Phi$  ικανοποιείται στην κατάσταση  $s$  της δομής  $M$  ως εξής:

$M, s \models p$	αν και μόνο αν	$p \in \text{Label}(s)$
$M, s \models \neg\Phi$	αν και μόνο αν	δεν ισχύει ότι $M, s \models \Phi$
$M, s \models \Phi \vee \Psi$	αν και μόνο αν	$(M, s \models \Phi)$ ή $(M, s \models \Psi)$
$M, s \models \mathbf{E} \varphi$	αν και μόνο αν	$M, w \models \varphi$ για κάποιο μονοπάτι $w$ που ξεκινά από την $s$
$M, s \models \mathbf{A} \varphi$	αν και μόνο αν	$M, w \models \varphi$ για κάθε μονοπάτι $w$ που ξεκινά από την $s$

## Σημασιολογία της CTL: ιδιότητες εκτέλεσης

- Έστω μονοπάτι  $w = s_0 s_1 s_2 \dots$  της δομής Kripke  $M$  και ιδιότητα  $\varphi$ . Ορίζουμε τη σχέση  $\models$  όπου

$M, w \models \varphi$  αν και μόνο αν η ιδιότητα  $\varphi$  ικανοποιείται στο μονοπάτι  $w$  της δομής  $M$

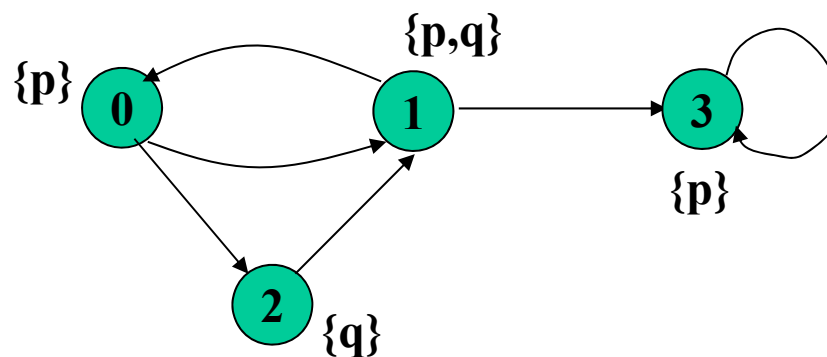
ως εξής:

$M, w \models \mathbf{X} \Phi$  αν και μόνο αν  $M, w[1] \models \Phi$

$M, w \models \Phi \mathbf{U} \Psi$  αν και μόνο αν υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $M, w[j] \models \Psi$  και για κάθε  $0 \leq k < j$ ,  $M, w[k] \models \Phi$

όπου αν  $w = s_0 s_1 s_2 \dots$ ,  $w[k]$  είναι η κατάσταση  $s_k$ .

# Παράδειγμα



Ποιες από τις πιο κάτω ιδιότητες ισχύουν;

$$M, 0 \models \mathbf{E X p} \quad \checkmark$$

$$M, 0 \models \mathbf{EF EG p} \quad \checkmark$$

$$M, 0 \models \mathbf{A (p \cup q)} \quad \checkmark$$

$$M, 0 \models \mathbf{AX EG p} \quad \times$$

$$M, 0 \models \mathbf{A X p} \quad \times$$

$$M, 0 \models \mathbf{A G p} \quad \times$$

# Ταυτολογίες της CTL

---

PLTL κανόνες ανάπτυξης

$$\Phi \mathbf{U} \Psi \equiv \Psi \vee (\Phi \wedge \mathbf{X}(\Phi \mathbf{U} \Psi))$$

$$\mathbf{F} \Phi \equiv \text{true} \mathbf{U} \Phi$$

$$\mathbf{G} \Phi \equiv \text{false} \mathbf{R} \Phi$$

---

---

CTL κανόνες ανάπτυξης

$$\mathbf{E}(\Phi \mathbf{U} \Psi) \equiv \Psi \vee (\Phi \wedge \mathbf{EX} \mathbf{E}(\Phi \mathbf{U} \Psi))$$

$$\mathbf{A}(\Phi \mathbf{U} \Psi) \equiv \Psi \vee (\Phi \wedge \mathbf{AX} \mathbf{A}(\Phi \mathbf{U} \Psi))$$

$$\mathbf{EF} \Phi \equiv \Phi \vee \mathbf{EX} \mathbf{EF} \Phi$$

$$\mathbf{AF} \Phi \equiv \Phi \vee \mathbf{AX} \mathbf{AF} \Phi$$

$$\mathbf{EG} \Phi \equiv \Phi \wedge \mathbf{EX} \mathbf{EG} \Phi$$

$$\mathbf{AG} \Phi \equiv \Phi \wedge \mathbf{AX} \mathbf{AG} \Phi$$

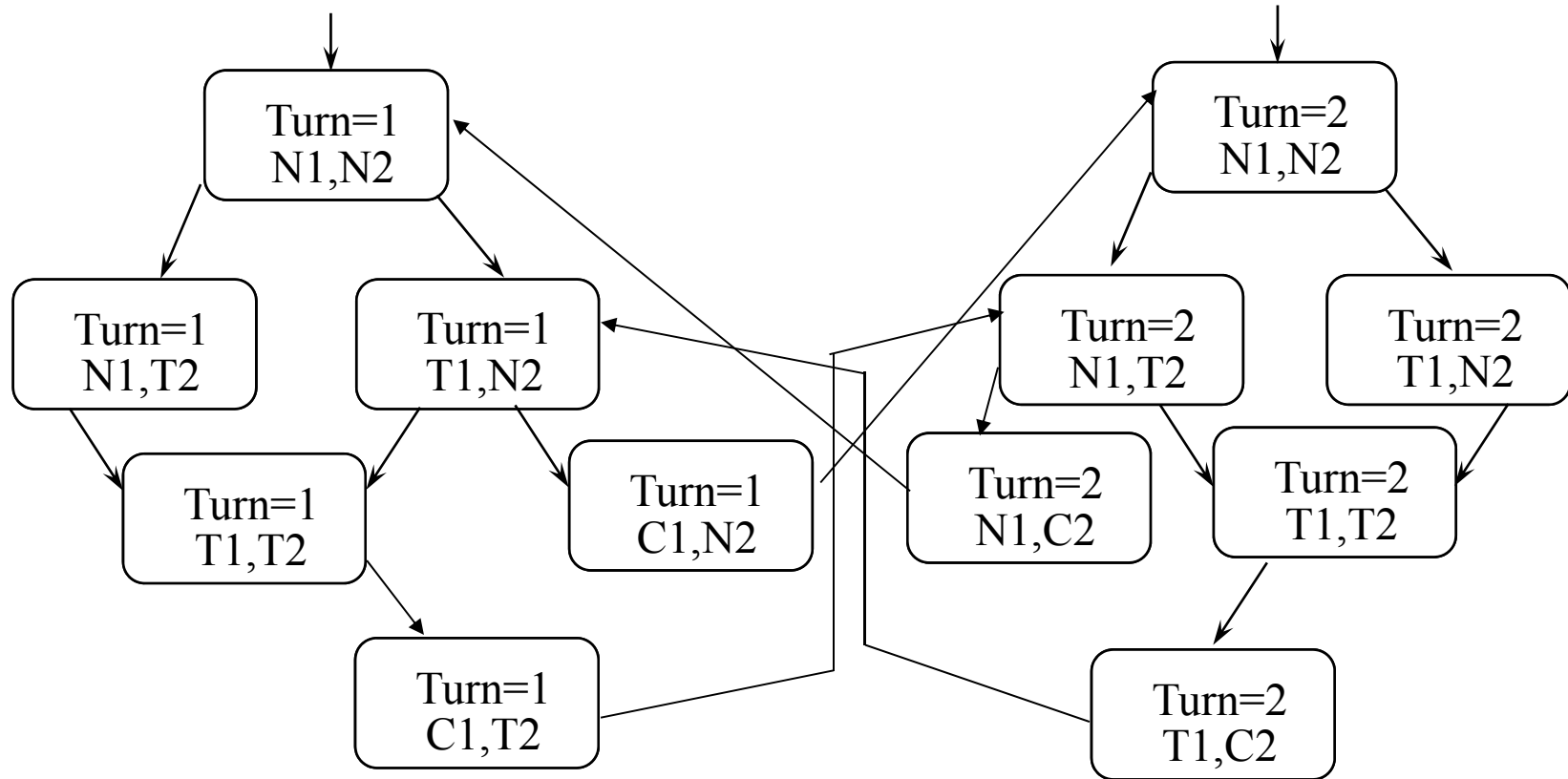
# Ιδιότητες στη CTL

---

- Δυνατότητα προσέγγισης κατάστασης
  - απλή  $\mathbf{EF} \Phi$
  - εξαρτώμενη  $\mathbf{E} (\Psi \mathbf{U} \Phi)$
  - από κάθε κατάσταση  $\mathbf{AG} (\mathbf{EF} \Phi)$
- Ασφάλεια (κάτι κακό δεν συμβαίνει ποτέ)  $\mathbf{AG} \neg \text{bad}$
- Ζωτικότητα (Liveness)  $\mathbf{AG} (\Phi \rightarrow \mathbf{AF} \Psi)$
- Δικαιοσύνη  $\mathbf{AG} (\mathbf{EF} \Phi)$



# Αμοιβαίος αποκλεισμός



$N_i$  : η διεργασία  $i$  είναι εκτός της κρίσιμης της περιοχής

$T_i$  : η διεργασία  $i$  προσπαθεί να εισέλθει στην κρίσιμη περιοχή

$C_i$  : η διεργασία  $i$  είναι εντός της κρίσιμης της περιοχής

# Αμοιβαίος Αποκλεισμός

---

- Ασφάλεια: οι δύο διεργασίες δεν βρίσκονται ποτέ ταυτόχρονα στην κρίσιμή τους περιοχή

$$\mathbf{AG} (\neg (C1 \wedge C2))$$

- Ζωτικότητα: Κάθε φορά που η διεργασία 1 προσπαθεί να εισέλθει στην κρίσιμή της περιοχή θα το πράξει

$$\mathbf{AG} (T1 \rightarrow \mathbf{AF} C1)$$

- Έλλειψη εμποδίων: Κάθε φορά που η διεργασία 1 βρίσκεται στη μη κρίσιμη της περιοχή, είναι δυνατόν, στην επόμενη χρονική στιγμή να προσπαθήσει να εισέλθει στην κρίσιμή της περιοχή

$$\mathbf{AG} (N1 \rightarrow \mathbf{EX} T1)$$

- Έλλειψη αυστηρής διάταξης: Είναι δυνατόν, η διεργασία 1 να εισέλθει στην κρίσιμή της περιοχή δύο συνεχόμενες φορές χωρίς να παρεμβληθεί η διεργασία 2.

$$\mathbf{EF} (C1 \wedge \mathbf{E} (C1 \mathbf{U} (\neg C1 \wedge \mathbf{E} (\neg C2 \mathbf{U} C1))))$$