Προτασιακός Λογισμός
(HR Κεφάλαιο 1)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Σύνταξη

Λογικός Συμπερασμός

Σημασιολογία

Ορθότητα και Πληρότητα

Κανονικές Μορφές

Προτάσεις Horn

Προτασιακός Λογισμός – Εισαγωγή

- Ο Προτασιακός Λογισμός είναι μια γλώσσα που ασχολείται με εκφράσεις που μπορεί να είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς.
- Μας επιτρέπει να διατυπώνουμε σύνθετες προτάσεις και να επιχειρηματολογούμε σχετικά με αυτές.
- Παράδειγμα:

  Αν το τραίνο αργήσει και δεν υπάρχουν ταξί στον σταθμό, τότε ο Γιάννης θα αργήσει για τη συνάντησή του. Δεν άργησε ο Γιάννης για τη συνάντησή του. Το τραίνο άργησε. Επομένως υπάρχουν ταξί στον σταθμό.

  Αν βρέχει και η Μαρία δεν έχει ομπρέλα , τότε η Μαρία θα βραχεί. Δεν βρέχτηκε η Μαρία. Βρέχει. Επομένως η Μαρία έχει ομπρέλα.

  Αν p και όχι q τότε r. Όχι r. p. Επομένως, q.

Ατομικές Προτάσεις

- Ο Προτασιακός Λογισμός έχει ως βασικό στοιχείο του δηλωτικές προτάσεις οι οποίες μπορεί να είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς.

- Παραδείγματα δηλωτικής πρότασης

  Το άθροισμα των αριθμών 3 και 5 είναι 8.

  Κάποιοι εξωγήινοι προτιμούν τα μπιφτέκια από την πίτσα.

  Κάθε άρτιος φυσικός αριθμός είναι το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.

  (Εικασία του Goldbach)

- Παραδείγματα μη δηλωτικής πρότασης

  Μπορείς να μου δώσεις το αλάτι;

  Καλή τύχη!

  $2n + 4 = 10$

Προτασιακός Λογισμός και Πληροφορική (1)

- Στην Πληροφορική, ο Προτασιακός Λογισμός επεξεργάζεται δηλωτικές προτάσεις ή απλά προτάσεις που αφορούν τη συμπεριφορά υπολογιστικών συστημάτων ή προγραμμάτων.
- Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο έλεγχος κατά πόσο ένα πρόγραμμα ή ένα σύστημα ικανοποιεί την πρόταση που μελετάμε (π.χ. την προδιαγραφή του).
- Έτσι, μας ενδιαφέρει να θεμελιώνουμε ισχυρισμούς και να καταλήγουμε σε συμπεράσματα με βάση δοθείσες υποθέσεις όπως π.χ. τις αρχικές τιμές μεταβλητών.

Προτασιακός Λογισμός και Πληροφορική (2)

- Ένα πιο δύσκολο ερώτημα είναι κατά πόσο, δοθείσας οποιασδήποτε ιδιότητας που ευσταθεί για ένα πρόγραμμα υπάρχει μια σειρά επιχειρημάτων η οποία, ξεκινώντας από κάποιες αληθείς προτάσεις (υποθέσεις) να οδηγεί στην ιδιότητά μας ως συμπέρασμα.

- Για παράδειγμα, η εικασία Goldbach δεν έχει αποδειχθεί μέχρι σήμερα.

- Ο προτασιακός λογισμός είναι *συμβολικός*: αναπαριστούμε ένα μεγάλο υποσύνολο όλων των δηλωτικών προτάσεων που μπορούμε να εκφράσουμε σε φυσική γλώσσα με σύμβολα.
  - Αυτό μας επιτρέπει να επικεντρωθούμε στην ορθή συμπερασματολογία
  - Επιτρέπει την αυτοματοποιημένη επαλήθευση ιδιοτήτων

Προτασιακός Λογισμός

- Ο Προτασιακός Λογισμός έχει ως βασικό του στοιχείο τις ατομικές προτάσεις οι οποίες είναι αδιάσπαστες δηλωτικές προτάσεις, π.χ. «Ο αριθμός 5 είναι περιττός».

- Έστω Prop το σύνολο των ατομικών προτάσεων τις οποίες θα συμβολίζουμε ως p, q, r, …

- Η γλώσσα του προτασιακού λογισμού αποτελείται από
  - ατομικές προτάσεις, p, q, r, …
  - Τελεστές, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
  - παρενθέσεις: (,)

- Οι τελεστές είναι οι :

$\neg$	: η *άρνηση*	$\wedge$	: η *σύζευξη*
$\vee$	: η *διάζευξη*	$\rightarrow$	: η *συνεπαγωγή*

- Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του προτασιακού λογισμού ονομάζεται *έκφραση*. Για παράδειγμα (q) , pq , $\neg$ pq, είναι εκφράσεις. Δεν είναι όμως όλες τους νόμιμες προτάσεις.

Σύνταξη Προτασιακού Λογισμού

- Το σύνολο των νόμιμων προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού (Form) ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο προτάσεων που παράγονται ως εξής:

$$\Phi \ ::= \ p \ | \ (\neg\Phi) \ | \ (\Phi\vee\Phi) \ | \ (\Phi\wedge\Phi) \ | \ (\Phi\rightarrow\Phi)$$

Δηλαδή:

- Κάθε ατομική πρόταση p είναι μία πρόταση της Form
- Αν η Φ είναι μια πρόταση, τότε και η άρνηση της Φ είναι πρόταση
- Αν οι Φ και Υ είναι προτάσεις, τότε η σύζευξη, η διάζευξη και η συνεπαγωγή τους είναι επίσης προτάσεις

Σύνθετες προτάσεις και παρενθέσεις

- Παράδειγμα σύνθετης πρότασης

  $(p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

  "Αν p και q, τότε όχι r ή q"

- Προτεραιότητα

$\neg$	↑ ψηλότερη προτεραιότητα
$\vee, \wedge$	|
$\rightarrow$	↓ χαμηλότερη προτεραιότητα

- Παράδειγμα:

  Η πρόταση $\neg p \wedge q$ είναι ισοδύναμη με την $(\neg p) \wedge q$ και όχι την $\neg(p \wedge q)$.

  Η πρόταση $p \wedge q \rightarrow r$ είναι ισοδύναμη με την $(p \wedge q) \rightarrow r$ και όχι την $p \wedge (q \rightarrow r)$.

Λογικός Συμπερασμός

- Για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων χρησιμοποιούμε ένα σύνολο αποδεικτικών κανόνων.
- Η διαδοχική εφαρμογή τέτοιων κανόνων μας επιτρέπει, ξεκινώντας από ένα σύνολο προϋποθέσεων, να καταλήξουμε σε ένα λογικό συμπέρασμα αυτών.
- Έστω ένα σύνολο προτάσεων $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$, που τις αποκαλούμε προϋποθέσεις και μία πρόταση ψ που αποκαλούμε συμπέρασμα. Θέλουμε με την εφαρμογή κανόνων στις προϋποθέσεις να δημιουργήσουμε προτάσεις από τις οποίες να καταλήξουμε στο συμπέρασμα. Αυτή την πρόθεση την συμβολίζουμε ως:

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

  και την ονομάζουμε λογικό επακόλουθο.
- Ένα λογικό επακόλουθο είναι έγκυρο αν μπορούμε να αποδείξουμε την ορθότητά του.

Λογικός Συμπερασμός (2)

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

  Αν το τραίνο αργήσει (p) και δεν υπάρχουν ταξί στον σταθμό (q),

  τότε ο Γιάννης αργεί για τη συνάντησή του (r).

  Δεν αργεί ο Γιάννης για τη συνάντησή του.

  Το τραίνο αργεί.

  Επομένως υπάρχουν ταξί στον σταθμό.

  $(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \ \neg r, \ p \quad \vdash \quad q$

- Οι κανόνες συμπερασμού που θα μελετήσουμε έχουν τη μορφή

$$\frac{\phi_1 \ldots \phi_n}{\phi} \quad \text{name}$$

όπου πάνω από την γραμμή γράφουμε τις προϋποθέσεις του κανόνα ($\phi_1 \ldots \phi_n$) κάτω από τη γραμμή το συμπέρασμα (ϕ) ενώ name είναι το όνομα του κανόνα.

Κανόνες Σύζευξης (1)

- Κανόνας εισαγωγής σύζευξης

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

Εξήγηση κανόνα: Αν ισχύουν οι προτάσεις ϕ και ψ, τότε ισχύει και η πρόταση $\phi \wedge \psi$.

- Κανόνες απαλοιφής σύζευξης

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

Εξήγηση κανόνων: Αν ισχύει η πρόταση $\phi \wedge \psi$, τότε ισχύουν ξεχωριστά και οι προτάσεις ϕ και ψ.

Κανόνες Σύζευξης (2)

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι p $\wedge$ q, r |– q $\wedge$ r.

Απόδειξη:

$$\cfrac{\cfrac{p \wedge q}{q}\,{\scriptstyle \wedge e_2} \qquad r}{q \wedge r}\,{\scriptstyle \wedge i}$$

Σε γραμμική μορφή η πιο πάνω «δενδρική» απόδειξη μπορεί να γραφτεί ως εξής:

1. p $\wedge$ q προϋπόθεση
2. r προϋπόθεση
3. q $\wedge e_2$ 1 (Εφαρμογή του κανόνα $\wedge$ e_2 στην γραμμή 1)
4. q $\wedge$ r $\wedge$ i 2, 3 (Εφαρμογή του κανόνα $\wedge$ i στις γραμμές 2 και 3)

Κανόνες Διπλής Άρνησης

- Απαλοιφή διπλής άρνησης

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\;\neg\neg e$$

- Εισαγωγή διπλής άρνησης

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\;\neg\neg i$$

Κανόνες Συνεπαγωγής (1)

- Απαλοιφή συνεπαγωγής (modus ponens)

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \; \to e$$

- Modus tollens

$$\frac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} \; \mathrm{MT}$$

Κανόνες Συνεπαγωγής (2)

- Κανόνας εισαγωγής συνεπαγωγής

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ .\\ .\\ \psi\end{array}}}{\phi\to\psi}\quad\to i$$

- Για να αποδειχθεί το $\phi \to \psi$ γίνεται μία προσωρινή υπόθεση ϕ και αποδεικνύεται το ψ με χρήση του ϕ και οποιασδήποτε άλλης προϋπόθεσης ή συμπεράσματος που έχει χρησιμοποιηθεί/αποδειχθεί.

- Η γραμμή που ακολουθεί το κουτί βρίσκεται εκτός του πλαισίου της υπόθεσης εφόσον εκφράζει ότι **ΑΝ** ισχύει η πρόταση ϕ τότε ισχύει και η ψ χωρίς όμως να υπάρχει οποιαδήποτε απαίτηση να ισχύει η ϕ.

Κανόνες Συνεπαγωγής (3)

- Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

Απόδειξη

1	$\neg q \to \neg p$	προϋπόθεση
2	p	(προσωρινή) υπόθεση
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg$ i 2
4	$\neg\neg q$	MT 1,3
5	$p \to \neg\neg q$	$\to$i 2-4

Θεωρήματα

- Λογικές προτάσεις φ τέτοιες ώστε $\vdash \phi$ (δηλαδή η φ ισχύει χωρίς προϋποθέσεις) ονομάζονται θεωρήματα.

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1	p	(προσωρινή) υπόθεση
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow$i 1-1

Αποδείκτηκε ότι $\vdash p \rightarrow p$.

Επομένως η πρόταση $p \rightarrow p$ είναι θεώρημα.

Κανόνες Διάζευξης

- Εισαγωγή διάζευξης

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee i_2$$

- Απαλοιφή Διάζευξης

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ x\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ x\end{array}}}{x} \vee e$$

Αν το x μπορεί να αποδειχθεί άσχετα από το αν ισχύει η πρόταση φ ή η πρόταση ψ τότε μπορούμε να συμπεραίνουμε το x.

Παράδειγμα

- Να αποδείξετε ότι:
  - $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$
  - $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg q \wedge r$
  - $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$
  - $p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash q$
  - $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

Κανόνας Αντιγραφής

- Είναι δυνατή η αντιγραφή μιας πρότασης που εμφανίζεται προηγούμενα μέσα σε μια απόδειξη. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται Κανόνας Αντιγραφής, και στις αποδείξεις τον αποκαλούμε copy.

- Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι $p \to (q \to p)$.

1	p	(προσωρινή) υπόθεση
2	q	(προσωρινή) υπόθεση
3	p	
4	$q \to p$	
5	$p \to (q \to p)$	$\to$i 1-4

Κανόνες Άρνησης (1)

- Άτοπο είναι οποιαδήποτε έκφραση με τη μορφή

  $\phi \wedge \neg \phi$ ή $\neg \phi \wedge \phi$,

  όπου ϕ κάποια νόμιμη πρόταση του προτασιακού λογισμού.

- Στον προτασιακό λογισμό όλες οι άτοπες προτάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Επίσης, από το άτοπο μπορούμε να συμπεράνουμε κάθε πρόταση. Για παράδειγμα

  $$p \wedge \neg p \vdash q$$

- Το άτοπο το συμβολίζουμε με το $\perp$ (bottom).

- Προτάσεις της μορφής $\phi \vee \neg \phi$ τις συμβολίζουμε με $\top$ (top).

Κανόνες Άρνησης (2)

- Απαλοιφή Άτοπου

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot e$$

- Εισαγωγή Άτοπου

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$$

Κανόνες Άρνησης (3)

- Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

1	$\neg p \vee q$	προϋπόθεση
2	$\neg p$	υπόθεση
3	p	υπόθεση
4	$\perp$	$\neg$e 3, 2
5	q	$\perp$e 4
6	$p \rightarrow q$	$\rightarrow$i 3-5
7	$p \rightarrow q$	

q	υπόθεση
p	υπόθεση
q	copy 2
$p \rightarrow q$	$\rightarrow$i 3-4

Κανόνες Άρνησης (4)

- Εισαγωγή Άρνησης

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \cdot\\ \cdot\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

- Επεξήγηση Κανόνα: Αν η υπόθεση μίας πρότασης μας οδηγήσει σε άτοπο τότε ισχύει η άρνηση της πρότασης που υποθέσαμε.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

1	$p \rightarrow q$	προϋπόθεση
2	$p \rightarrow \neg q$	προϋπόθεση
3	p	υπόθεση
4	q	$\rightarrow$e 1, 3
5	$\neg q$	$\rightarrow$e 2, 3
6	$\bot$	$\neg$ e 4, 5
7	$\neg p$	$\neg$ i 3-6

Παράγωγοι Κανόνες (1)

- Παράγωγοι Κανόνες είναι κανόνες οι οποίοι μπορούν να παραχθούν χρησιμοποιώντας άλλους κανόνες του λογικού συμπερασμού.
- Διευκολύνουν την απόδειξη συμπερασμάτων.
- Ο Κανόνας Modus Tollens είναι παράγωγος κανόνας.

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ \mathrm{MT}$$

1	$\phi \rightarrow \psi$	προϋπόθεση
2	$\neg \psi$	προϋπόθεση
3	ϕ	υπόθεση
4	ψ	$\rightarrow$ e 1, 3
5	$\perp$	$\neg$ e 4, 2
6	$\neg \phi$	$\neg$ i 3-5

Παράγωγοι Κανόνες (2)

- Εισαγωγή ¬ ¬

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

1	ϕ	προϋπόθεση
2	$\neg\ \phi$	υπόθεση
3	$\perp$	¬ e 1, 2
4	$\neg\neg\ \phi$	¬ i 2-3

Παράγωγοι Κανόνες (3)

- Εις άτοπο απαγωγή (reductio ad absurdum)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \cdot\\ \cdot\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ RAA$$

1	$\neg\phi \rightarrow \bot$	δεδομένο
2	$\neg\phi$	υπόθεση
3	$\bot$	$\rightarrow$ e 1, 2
4	$\neg\neg\phi$	$\neg$i 2-3
5	ϕ	$\neg\neg$ e 4

Παράγωγοι Κανόνες (4)

- Νόμος του αποκλειόμενου μέσου (Law of Excluded Middle ή tertium non datur)

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \mathit{L}\mathrm{EM}$$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	υπόθεση
2	ϕ	υπόθεση
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee$i 1 2
4	$\perp$	$\neg$e 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg$i 2-4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee$i 2 5
7	$\perp$	$\neg$e 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg$i 1-7
9	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg$e 8

Κατασκευή Αποδείξεων (1)

- Πως αποδεικνύουμε την ορθότητα ενός συμπερασμού;

  Γράφουμε τις προϋποθέσεις στην αρχή της σελίδας και το συμπέρασμα στο τέλος της. Δουλεύουμε και προς τις δύο κατευθύνσεις.

- Για παράδειγμα αν το συμπέρασμα είναι μια πρόταση της μορφής $\phi \to \psi$ τότε γνωρίζουμε πως ο τελευταίος κανόνας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι ο $\to$i και επομένως σχεδιάζουμε πάνω από το συμπέρασμά μας ένα κουτί με υπόθεση την ϕ και συμπέρασμα την ψ. Συνεχίζουμε προσπαθώντας να γεμίσουμε το καινούριο αυτό κουτί.

…

προϋποθέσεις

.

.

.

ϕ	υπόθεση
ψ	

$\phi \to \psi \quad \to$i

Κατασκευή Αποδείξεων (2)

- Σε κάθε βήμα μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένα κανόνες που να βρίσκουν εφαρμογή.
  - Οι κανόνες $\rightarrow$ i και $\neg$ i είναι συνήθως βοηθητικοί και συστήνεται η χρήση τους.
  - Καλό επίσης είναι σε κάθε βήμα να καταγράφουμε όλους τους κανόνες που είναι υποψήφιοι για εφαρμογή και να επιλέγουμε τελικά τον κανόνα που φαίνεται να βοηθά περισσότερο στην απόδειξη.

Αποδείξιμη Ισοδυναμία

- Δύο προτάσεις ϕ και ψ είναι αποδείξιμα ισοδύναμες αν και μόνο αν

  $$\phi \vdash \psi \text{ και } \psi \vdash \phi$$

  Αυτό το συμβολίζουμε ως $\phi \dashv\vdash \psi$.

- Η δήλωση $\phi \dashv\vdash \psi$ είναι ισοδύναμη με το λογικό επακόλουθο $\vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

- Παραδείγματα
  - $\neg (p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$
  - $\neg (p \vee q) \dashv\vdash \neg p \wedge \neg q$
  - $p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$
  - $p \wedge q \to p \dashv\vdash r \vee \neg r$

Σημασιολογία του Προτασιακού Λογισμού

- Έχουμε ορίσει τον Προτασιακό Λογισμού ως ένα λογισμό όπου μπορούμε να ελέγχουμε επακόλουθα της μορφής:

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

- Η σημασιολογία του λογισμού αυτού μπορεί να δοθεί θεωρώντας τους τελεστές του προτασιακού λογισμού ως συναρτήσεις πάνω στο σύνολο των λογικών τιμών {T,F}.

Πίνακες Αλήθειας των Τελεστών του ΠΛ

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

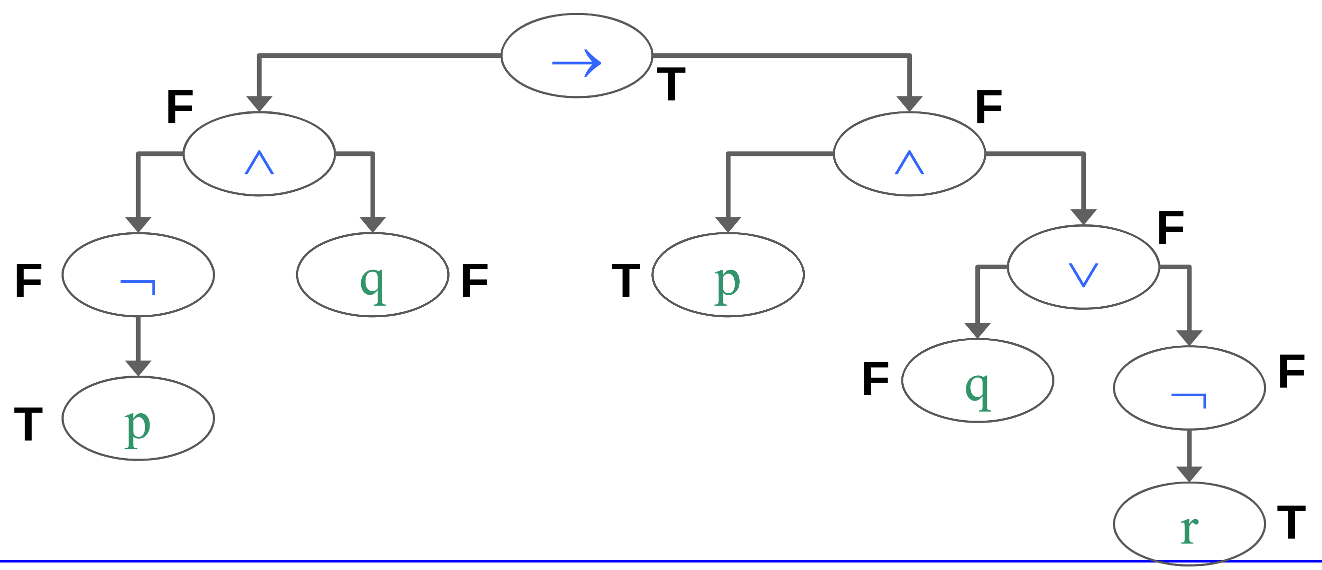
ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

$\top$
T

$\bot$
F

Παράδειγμα

- Θεωρήστε την πρόταση $\phi = \neg p \wedge q \to p \wedge (q \vee \neg r)$.
- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον σχετικό πίνακα αλήθειας;
- Ας θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη ανάθεση λογικών τιμών των ατομικών προτάσεων p, q και r, π.χ. p = T, q = F και r = T. Η αποτίμηση της τιμής της ϕ γίνεται με βάση μιας μεταθεματικής διάσχισης του δένδρου που αντιστοιχεί στην πρόταση και με χρήση των πινάκων αληθείας των τελεστών που περιλαμβάνει η ϕ.



Σημασιολογική Συνεπαγωγή

- Οι κανόνες συμπερασμού για τον ΠΛ μας έχουν εφοδιάσει με ένα εργαλείο εξαγωγής συμπερασμάτων αναφορικά με προτάσεις γραμμένες σ'αυτόν.

- Είναι όμως αυτοί οι κανόνες ορθοί, υπό την έννοια ότι ικανοποιούν τη σημασιολογία του ΠΛ; Ή μήπως είναι δυνατό να αποδείξουμε ότι ενώ

  $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

  υπάρχει απόδοση λογικών τιμών στις ατομικές προτάσεις των $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, και ψ που να κάνουν τις προτάσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ αληθείς και την ψ ψευδή;

- Γράφουμε $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$

  αν η πρόταση ψ παίρνει την τιμή T κάθε φορά που οι προτάσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$ παίρνουν την τιμή T. Ονομάζουμε τη σχέση $\models$ σημασιολογική συνεπαγωγή.

Παράδειγμα

Ποια από τα πιο κάτω ισχύουν;

- $p \wedge q \models p$
- $p \vee q \models p$
- $\neg q,\ p \vee q \models p$

Σημασιολογικές Έννοιες

- Ισοδυναμία: Οι προτάσεις φ και ψ είναι σημασιολογικά ισοδύναμες αν
$$\phi \models \psi \quad \text{και } \psi \models \phi$$
Σε τέτοια περίπτωση γράφουμε $\phi \equiv \psi$.

- Εγκυρότητα: Η πρόταση φ είναι έγκυρη αν $\models \phi$.
Μια έγκυρη πρόταση ονομάζεται και ταυτολογία.

Ορθότητα Προτασιακού Λογισμού

- **Θεώρημα 1**: Έστω σύνολο προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού Φ και πρόταση ψ. Αν Φ $\vdash$ ψ τότε Φ $\models$ ψ.

- **Βασική Ιδέα Απόδειξης**: Κάθε κανόνας οδηγεί σε σωστό συμπέρασμα βάσει των σχετικών πινάκων αληθείας.

  – Έστω Φ $\vdash$ ψ.

  – Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο μέγεθος της απόδειξης.

Βασική Περίπτωση και Υπόθεση Επαγωγής

- *Βασική Περίπτωση*

  Έστω μία απόδειξη με μόνο μία γραμμή. Τότε πρέπει να ισχύει ότι ψ ∈ Φ και η απόδειξη είναι η

  1. ψ υπόθεση

  Θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόταση ψ είναι αληθής στις γραμμές του πίνακα αλήθειας όπου αληθεύουν οι προτάσεις του συνόλου Φ. Εφόσον ψ ∈ Φ το ζητούμενο έπεται.

- *Υπόθεση της επαγωγής*

  Έστω ότι Φ ├ ψ τότε Φ ╞ ψ για κάθε απόδειξη με λιγότερες από Κ γραμμές.

Βήμα της Επαγωγής

- Έστω ότι απόδειξη της πρότασης ψ έχει Κ γραμμές και είναι η ακολουθία $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_k\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_m\ \psi$. Ας υποθέσουμε ότι έχει τη μορφή

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_k \quad \boxed{\begin{matrix}\psi_1 \\ \vdots \\ \chi_1\end{matrix}} \quad \begin{matrix}\ldots \\ \ldots \\ \ldots\end{matrix} \quad \boxed{\begin{matrix}\psi_m \\ \vdots \\ \chi_m\end{matrix}}}{\psi}$$

όπου για κάθε i, α_i είναι η απόδειξη της πρότασης ϕ_i και β_i η απόδειξη της πρότασης χ_i.

- Από την υπόθεση της επαγωγής
  - Αφού $\Phi \vdash \phi_i$ τότε $\Phi \models \phi_i$ και
  - αφού $\Phi, \psi_i \vdash \chi_i$, τότε $\Phi, \psi_i \models \chi_i$.
- Απομένει να δείξουμε την ορθότητα της χρήσης του τελευταίου κανόνα. Αυτό μπορούμε να το πράξουμε θεωρώντας ξεχωριστά όλες τις περιπτώσεις.

Κανόνας $\wedge_i$

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

- Η απόδειξη περιλαμβάνει αποδείξεις των προτάσεων ϕ και ψ:

  $\Phi \vdash \phi$ και $\Phi \vdash \psi$

- Από την υπόθεση της επαγωγής

  $\Phi \models \phi$ και $\Phi \models \psi$

- Ποια είναι η τιμή του $\phi \wedge \psi$ όταν τα ϕ και ψ αληθεύουν;

- Προφανώς T και επομένως $\Phi \models \phi \wedge \psi$.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T

Κανόνας $\perp_e$

$$\frac{\perp}{\phi}\ \perp e$$

- Η απόδειξη περιλαμβάνει την απόδειξη του άτοπου:

  $\Phi \vdash \perp$.

- Από την υπόθεση της επαγωγής

  $\Phi \models \perp$.

- Ποια είναι η τιμή του ϕ όταν το $\perp$ αληθεύει;

- Το $\perp$ δεν αληθεύει ποτέ έτσι, τετριμμένα, έχουμε ότι όποτε το $\perp$ αληθεύει τότε αληθεύει και το ϕ και το ζητούμενο έπεται.

Κανόνας $\rightarrow_i$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow i$$

- Η απόδειξη περιλαμβάνει την απόδειξη

  $\Phi, \phi \vdash \psi$

- Από την υπόθεση της επαγωγής

  $\Phi, \phi \models \psi$

- Επομένως όταν οι προτάσεις του συνόλου Φ καθώς και η πρόταση φ αληθεύει η τιμή του ψ είναι T.

- Ποια είναι η τιμή του $\phi \rightarrow \psi$ όταν τα Φ, φ αληθεύουν;

Κανόνας $\rightarrow_i$

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
~~T~~	~~F~~	~~F~~
F	T	T
F	F	T

- Η ενδιαφέρουσα περίπτωση αφορά το σενάριο όπου το ϕ παίρνει την τιμή Τ και το ψ την τιμή F. Εφόσον όμως έχει αποδειχθεί ότι όταν οι προτάσεις Φ , ϕ αληθεύουν η τιμή του ψ είναι Τ, η περίπτωση αυτή αποκλείεται να συμβεί και το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση

- Να αποδείξετε την ορθότητα των κανόνων:
  - $\wedge_{e1}$
  - $\neg\neg_{i}$
  - MP
  - MT
  - $\vee_{e}$
- Η απόδειξη των κανόνων αυτών ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 1.

Μη έγκυρα λογικά επακόλουθα

- Πως μπορούμε να αποφασίσουμε ότι το λογικό επακόλουθο

  $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

  δεν είναι έγκυρο;

- Βάσει της ορθότητας του συστήματος συμπερασμού, είναι αρκετό να δώσουμε ένα σύνολο τιμών αλήθειας για τα οποία οι προϋποθέσεις ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_n$ να παίρνουν την τιμή T και το συμπέρασμα, ψ, να παίρνει την τιμή F.

- Τότε από τον ορισμό της σημασιολογικής συνεπαγωγής

  $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \nvDash \psi$$

  και από το Θεώρημα της Ορθότητας έπεται ότι

  $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \nvdash \psi$$

- Παράδειγμα: Να δείξετε ότι το λογικό επακόλουθο $\neg p \vee (q \rightarrow p) \vdash \neg p \wedge q$ δεν είναι έγκυρο

Πληρότητα Προτασιακού Λογισμού

- Το δεύτερο σημαντικό ερώτημα σχετικά με τους κανόνες συμπερασμού που έχουμε μελετήσει είναι το εξής:

  Υπάρχει απόδειξη για το λογικό επακόλουθο

  $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$$

  δεδομένου ότι $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$;

- Θεώρημα 2 (Πληρότητα): Έστω προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$ και ψ. Αν $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$ τότε $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi$.

- Βασική Ιδέα της Απόδειξης: Κατασκευή της απόδειξης από τους πίνακες αληθείας.

Δομή της απόδειξης

- Βήμα 1: Εφάρμοσε απαλοιφή των προϋποθέσεων της απόδειξης:

  Αν $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$ τότε $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to(\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots))$

- Βήμα 2: Κατασκεύασε τη σχετική απόδειξη:

  Αν $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to(\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots))$ τότε $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to(\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots))$

- Βήμα 3: Κάνε ξανά εισαγωγή των προϋποθέσεων:

  Αν $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to(\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots))$ τότε $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$

Απόδειξη Πληρότητας – Βήμα 1

- Γνωρίζουμε ότι

  $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$$

  και θέλουμε να δείξουμε ότι

  $$\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots (\phi_n \rightarrow \psi)\ldots)).$$

  Δηλαδή, θέλουμε να δείξουμε ότι η $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots (\phi_n \rightarrow \psi)\ldots))$ είναι ταυτολογία.

- Η μόνη περίπτωση που η συνεπαγωγή παίρνει την τιμή F είναι όταν τα $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, παίρνουν την τιμή T και το ψ την τιμή F.

- Αφού όμως $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi$ αυτό αποκλείεται να συμβεί και το ζητούμενο έπεται.

Απόδειξη Πληρότητας – Βήμα 2

- Θα κατασκευάσουμε την απόδειξη του λογικού επακόλουθου

$$\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to(\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots))$$

Θεώρημα 3: Έστω πρόταση ϕ με ατομικές προτάσεις τις $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Για κάθε γραμμή l του πίνακα αληθείας της ϕ και κάθε ατομική πρόταση α γράφουμε $\gamma_l(\alpha)$ για το α αν α παίρνει την τιμή T στη γραμμή l και, διαφορετικά $\neg\alpha$. Τότε έχουμε ότι

- $\gamma_l(p_1), \gamma_l(p_2), \ldots, \gamma_l(p_n) \vdash \phi$ αν η ϕ παίρνει την τιμή T στη γραμμή l, και
- $\gamma_l(p_1), \gamma_l(p_2), \ldots, \gamma_l(p_n) \vdash \neg\phi$ αν η ϕ παίρνει την τιμή F στη γραμμή l.

- Η απόδειξη του λογικού επακόλουθου γίνεται με μαθηματική επαγωγή στη δομή της ιδιότητας ϕ.

- Παράδειγμα: Κατασκευάστε αποδείξεις για κάθε γραμμή του πίνακα αλήθειας της πρότασης

$$\neg (p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$$

Απόδειξη Πληρότητας – Βήμα 2

- Απομένει τώρα να συνδυάσουμε αυτές τις αποδείξεις σε μία ολοκληρωμένη απόδειξη του λογικού επακόλουθου

$$\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to(\ldots (\phi_n \to \psi)\ldots))$$

- Ο συνδυασμός αυτός επιτυγχάνεται με χρήση του κανόνα LEM.

- Βασική ιδέα: Εντόπισε ζεύγη λογικών επακόλουθων που διαφέρουν στην αλήθεια ακριβώς μίας ατομικής πρότασης. Χρησιμοποίησε τον κανόνα LEM για δημιουργία νέας απόδειξης που δεν εμπεριέχει τη συγκεκριμένη ατομική πρόταση.

Απόδειξη Πληρότητας – Βήμα 2

Να δείξετε ότι $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$ χρησιμοποιώντας τα λογικά επακόλουθα:

$$p, q \vdash (p \wedge q) \rightarrow p \qquad (1)$$

$$p, \neg q \vdash (p \wedge q) \rightarrow p \qquad (2)$$

$$\neg p, q \vdash (p \wedge q) \rightarrow p \qquad (3)$$

$$\neg p, \neg q \vdash (p \wedge q) \rightarrow p \qquad (4)$$

1.	$p \vee \neg p$	LEM
2.	p	υπόθεση
3.	$q \vee \neg q$	LEM
4.	q	προσωρινή υπόθεση
5.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	(1)
6.	$\neg q$	προσωρινή υπόθεση
7.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	(2)
8.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$\vee_e$ 3, 4-5, 6-7
9.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$\vee_e$ 1, 2-9

$\neg p$	υπόθεση
$q \vee \neg q$	LEM
q	προσωρινή υπόθεση
$(p \wedge q) \rightarrow p$	(3)
$\neg q$	προσωρινή υπόθεση
$(p \wedge q) \rightarrow p$	(4)
$(p \wedge q) \rightarrow p$	$\vee_e$ 3, 4-5, 6-7

Απόδειξη Πληρότητας – Βήμα 3

Αν $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots (\phi_n \rightarrow \psi)\ldots))$ τότε $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

- Πάρε την απόδειξη της πρότασης και εισήγαγε τα $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ ως προϋποθέσεις.
- Εφάρμοσε τον κανόνα MP μία φορά για κάθε συνεπαγωγή και θα λάβεις την απόδειξη

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

Ορθότητα και Πληρότητα

- Απόρροια των πιο πάνω είναι ότι:

Θεώρημα 4: Έστω προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$ και ψ. Τότε

$$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \models \psi \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n \vdash \psi.$$

Σημασιολογικές Έννοιες

- Ισοδυναμία: Οι προτάσεις ϕ και ψ είναι σημασιολογικά ισοδύναμες αν

  $$\phi \models \psi \quad \text{και } \psi \models \phi$$

  Σε τέτοια περίπτωση γράφουμε $\phi \equiv \psi$.

- Εγκυρότητα: Η πρόταση ϕ είναι έγκυρη αν $\models \phi$.

  Μια έγκυρη πρόταση ονομάζεται και ταυτολογία.

- Ικανοποιησιμότητα: Η πρόταση ϕ είναι ικανοποιήσιμη αν υπάρχει ανάθεση λογικών τιμών στις ατομικές της προτάσεις που να την κάνουν αληθή.

- Λήμμα: Μία πρόταση ϕ είναι έγκυρη αν και μόνο αν η πρόταση $\neg \phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμη.

Απόδειξη εγκυρότητας

- Στόχος: Μηχανική διαδικασία που να αποφασίζει την εγκυρότητα οποιασδήποτε πρότασης του ΠΛ.

- Υπάρχουσες επιλογές:
  - Πίνακες Αλήθειας: δαπανηρή μέθοδος από άποψη χρόνου αφού ο πίνακας αλήθειας μιας πρότασης με n ατομικές προτάσεις περιέχει 2^n γραμμές
  - Κανόνες Συμπερασμού: αβεβαιότητα για τη σειρά εφαρμογής των κανόνων

- Εναλλακτική πρόταση
  - Μετατροπή προτάσεων σε μορφές που επιτρέπουν εύκολη ανάλυση

Κανονικές Μορφές

- Η πρόταση φ βρίσκεται σε συζευκτική κανονική μορφή, CNF, αν είναι της μορφής

  $$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

  όπου για κάθε i

  $$\phi_i = \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m,$$

  και κάθε α_j είναι είτε μια ατομική πρόταση είτε η άρνηση μιας ατομικής πρότασης.

- Συχνά, θα ξεχωρίζουμε τους θετικούς/αρνητικούς όρους και θα γράφουμε τα ϕ_i ως

  $$(p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k).$$

- Παράδειγμα: Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις βρίσκονται σε CNF;

  $$(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge q$$

  $$(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$$

  $$(\neg(q \vee p) \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

Κανονικές Μορφές και Εγκυρότητα (1)

- CNF: Η πρόταση $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ είναι έγκυρη αν όλες οι προτάσεις ϕ_i είναι έγκυρες.

- Θεώρημα 5: Η διάζευξη $(p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$ είναι έγκυρη αν και μόνο αν υπάρχουν i και j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$ τέτοια ώστε $p_i = q_j$.

- Παράδειγμα: Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι έγκυρες;

  $(\neg q \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee q)$

  $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg r \vee r) \wedge q$

  $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg r \vee r)$

Κανονικές Μορφές και Εγκυρότητα (2)

Απόδειξη Θεωρήματος 5:

Έστω ότι υπάρχουν i και j, $1 \leq i, j \leq n$ τέτοια ώστε $p_i = q_j$.

Τότε $(p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$

$$\equiv (p_i \vee \neg p_i) \vee (p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$$
$$= T \vee ((p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$$
$$= T$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η πρόταση $(p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$ είναι έγκυρη και ας υποθέσουμε επίσης, για να φθάσουμε σε αντίφαση, ότι για κανένα i δεν υπάρχει j τέτοιο ώστε $p_i = q_j$.

Ας θεωρήσουμε τη λογική ανάθεση τιμών $[[p_1]] = \ldots = [[p_m]] = F$ και $[[q_1]] = \ldots = [[q_k]] = T$. Τότε

$$[[(p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)]] = F$$

και επομένως δεν είναι έγκυρη. Αντίφαση!

Συνεπώς, το ζητούμενο έπεται.

Εγκυρότητα Συζευκτικής Κανονικής Μορφής

Θεώρημα 6: Η συζευκτική κανονική μορφή $\phi = \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ είναι έγκυρη αν και μόνο αν, για κάθε $\phi_k \equiv (p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$ υπάρχουν i και j, $1 \leq i, j \leq n$, τέτοια ώστε $p_i = \neg q_j$.

Απόδειξη:

- Αν πράγματι η ϕ έχει αυτή τη μορφή, από το Θεώρημα 5 έπεται πως όλες οι προτάσεις ϕ_k παίρνουν πάντα την τιμή T. Επομένως η σύζευξή τους είναι επίσης έγκυρη.

- Αν η ϕ δεν έχει αυτή τη μορφή, τότε υπάρχει k τέτοιο ώστε $\phi_k = (p_1 \vee \ldots \vee p_m) \vee (\neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k)$ όπου δεν υπάρχουν i και j, $1 \leq i, j \leq n$ τέτοια ώστε $p_i = \neg q_j$. Επομένως $[[\phi_k]] = F$ για μια ανάθεση τιμών στις ατομικές της προτάσεις. Για την ίδια ανάθεση προφανώς ισχύει επίσης ότι $[[\phi]] = F$ και επομένως δεν είναι έγκυρη.

Μετατροπή σε CNF

- Πως μπορούμε να μετατρέψουμε μια τυχαία πρόταση του ΠΛ σε συζευκτική κανονική μορφή;

- Βοηθητικοί κανόνες:
  - Απαλοιφή συνεπαγωγών:

    $\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$

  - Απαλοιφή αρνήσεων:

    $\neg\neg\phi \equiv \phi$

    $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg \phi \wedge \neg\psi$

    $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg \phi \vee \neg\psi$

  - Εισαγωγή συζεύξεων από διαζεύξεις

    $\phi \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\phi \vee \psi_1) \wedge (\phi \vee \psi_2)$

    $(\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \phi \equiv (\psi_1 \vee \phi) \wedge (\psi_2 \vee \phi)$

Αλγόριθμος Μετατροπής

- Βασική ιδέα Αλγορίθμου Μετατροπής CNF(φ)
  1. Αφαίρεσε όλες τις συνεπαγωγές από τη φ χρησιμοποιώντας τον κανόνα $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$ (διαδικασία Impl_Free)
  2. Αφαίρεσε όλες τις διπλές αρνήσεις και σπρώξε τις αρνήσεις «προς τα μέσα» στο επίπεδο των ατομικών προτάσεων (διαδικασία NNF)
  3. Μετάτρεψε τις διαζεύξεις που βρίσκονται σε επίπεδο μη-ατομικών προτάσεων σε συζεύξεις.

- Παράδειγμα 1:

$$
\begin{aligned}
&p \to (p \wedge (p \vee q)) \\
&\quad \equiv \neg p \vee (p \wedge (p \vee q)) \\
&\quad \equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee p \vee q)
\end{aligned}
$$

- Παράδειγμα 2:

$$
\begin{aligned}
&p \to (p \wedge (p \wedge q)) \\
&\quad \equiv \neg p \vee (p \wedge (p \wedge q)) \\
&\quad \equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee (p \wedge q)) \\
&\quad \equiv (\neg p \vee p) \wedge ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)) \\
&\quad \equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)
\end{aligned}
$$

Διαδικασία Impl_Free

```
Impl_Free(ϕ){
   if ϕ = p, ¬p    return  ϕ
   if ϕ = ¬ϕ       return  ¬Impl_Free(ϕ)
   if ϕ = ϕ1 ∨ ϕ2  return  Impl_Free(ϕ1)∨Impl_Free(ϕ2)
   if ϕ = ϕ1 ∧ ϕ2  return  Impl_Free(ϕ1)∧ Impl_Free(ϕ2)
   if ϕ = ϕ1 → ϕ2  return  ¬Impl_Free(ϕ1)∨Impl_Free(ϕ2)
}
```

Παράδειγμα:

Impl_Free$(\neg p \wedge q \rightarrow p \wedge (r \rightarrow q))$

$= \neg$ Impl_Free$(\neg p \wedge q) \vee$ Impl_Free$(p \wedge (r \rightarrow q))$

$= \neg$ (Impl_Free$(\neg p) \wedge$ Impl_Free$(q)) \vee$ (Impl_Free$(p) \wedge$ Impl_Free$(r \rightarrow q))$

$= \neg (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg$ Impl_Free$(r) \vee$ (Impl_Free$(q)))$

$= \neg (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q))$

Διαδικασία NNF

```
NNF(ϕ){
   if ϕ = p, ¬p        return  ϕ
   if ϕ = ¬¬ϕ          return  NNF(ϕ)
   if ϕ = ϕ1 ∨ ϕ2      return  NNF(ϕ1)∨ NNF(ϕ2)
   if ϕ = ϕ1 ∧ ϕ2      return  NNF(ϕ1) ∧ NNF(ϕ2)
   if ϕ = ¬(ϕ1 ∨ ϕ2)   return  NNF(¬ ϕ1) ∧ NNF(¬ϕ2)
   if ϕ = ¬(ϕ1 ∧ ϕ2)   return  NNF(¬ ϕ1)∨ NNF(¬ϕ2)
}
```

Παράδειγμα:

$\mathrm{NNF}(\neg(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q)))$

$= \mathrm{NNF}(\neg(\neg p \wedge q)) \vee \mathrm{NNF}((p \wedge (\neg r \vee q)))$

$= (\mathrm{NNF}(\neg(\neg p)) \vee \mathrm{NNF}(\neg q))) \vee (\mathrm{NNF}(p) \wedge \mathrm{NNF}((\neg r \vee q)))$

$= (p \vee \neg q) \vee (p \wedge (\mathrm{NNF}(\neg r) \vee \mathrm{NNF}(q)))$

$= (p \vee \neg q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q))$

Διαδικασία Distr

```
Distr(ϕ, ψ){
   if ϕ = ϕ1 ∧ ϕ2      return  Distr(ϕ1,ψ) ∧ Distr(ϕ2,ψ)
   if ψ = ψ1 ∧ ψ2      return  Distr(ϕ,ψ1) ∧ Distr(ϕ,ψ2)
   else    return ϕ ∨ ψ
   }
```

Παράδειγμα:

$\text{Distr}((p \vee \neg q), (p \wedge (\neg r \vee q)))$

$= \text{Distr}((p \vee \neg q), p) \wedge \text{Distr}((p \vee \neg q), (\neg r \vee q))$

$= (p \vee \neg q \vee p) \wedge ((p \vee \neg q) \vee (\neg r \vee q))$

Διαδικασία CNF

```
CNF(φ){
    φ = Impl_Free(φ);
    φ = NNF(φ);
    return (CNF_rec(φ))
}

CNF_rec(φ){
   if φ = p, ¬p      return  φ
   if φ = φ1 ∧ φ2 return  CNF_rec(φ1) ∧ CNF_rec(φ2)
   if φ = φ1 ∨ φ2 return Distr(CNF_rec(φ1),CNF_rec(φ2))
   }
```

Παράδειγμα

Να υπολογίστε τη συζευκτική κανονική μορφή της πρότασης

$$r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$$

Προτάσεις Horn

- Στόχος: Αποδοτικός έλεγχος κατά πόσο μια πρόταση είναι ικανοποιήσιμη.
- Προτάσεις Horn: $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ όπου κάθε ϕ_i (όρος Horn) είναι ένα από τα
  - $T \rightarrow p$
  - $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow \perp$
  - $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$
- Παράδειγμα: Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι προτάσεις Horn;
  - $(p \wedge q \wedge s \rightarrow p) \wedge (q \wedge r \rightarrow p) \wedge (p \wedge q \rightarrow \perp)$
  - $(p \wedge q \wedge s \rightarrow \neg p) \wedge (q \wedge r \rightarrow p)$
  - $(p \wedge q \wedge s \rightarrow p) \wedge (q \wedge r \vee p)$
- Σημείωση: $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q \equiv \neg(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \vee q \equiv \neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q$. Επομένως κάθε όρος Horn αποτελεί μια διάζευξη με μόνο μία «θετική» ατομική πρόταση.

Προτάσεις Horn και ικανοποιησιμότητα

- Πότε μία πρόταση Horn είναι ικανοποιήσιμη;
- Βασική Ιδέα:
  - Εντοπισμός των ατομικών προτάσεων που *πρέπει* να έχουν την τιμή T.
  - Οι υπόλοιπες προτάσεις παίρνουν την τιμή F.

Παράδειγμα:

$(T \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (p \wedge r \rightarrow \perp) \wedge (w \wedge v \rightarrow \perp)$

1. Αφού $T \rightarrow r$ πρέπει $[[r]] = T$
2. Αφού $[[r]] = T$ και $r \rightarrow p$ πρέπει $[[p]] = T$
3. Αφού $[[r]] = T$, $[[p]] = T$ και $(p \wedge r \rightarrow \perp)$ πρέπει $[[\perp]] = T$
4. Όμως $[[\perp]] = F$ και επομένως η πρόταση δεν είναι ικανοποιήσιμη.

Προτάσεις Horn και ικανοποιησιμότητα

Παράδειγμα:

$(T \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (p \wedge r \rightarrow w) \wedge (w \wedge v \rightarrow \bot)$

1. Αφού $T \rightarrow r$ πρέπει $[[r]] = T$
2. Αφού $[[r]] = T$ και $r \rightarrow p$ πρέπει $[[p]] = T$
3. Αφού $[[r]] = T$, $[[p]] = T$ και $(p \wedge r \rightarrow w)$ πρέπει $[[w]] = T$
4. Δεν υπάρχουν άλλες απαιτήσεις, επομένως θέτουμε $[[v]] = F$.

Αλγόριθμος

- Γράφουμε $\overline{p}$ για την ατομική πρόταση που έχει τύχει μαρκαρίσματος.

```
Satisfy_Horn(ϕ){
   for all T → p mark all p
   while p̄₁ ∧ … ∧ p̄ₙ → q ∈ ϕ
        if q = ⊥ return unsatisfiable
        else mark all q

   return satisfiable
}
```

Παράδειγμα

Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο Satisfy_Horn για να αποφασίσετε κατά πόσο η πιο κάτω πρόταση είναι ικανοποιήσιμη.

$$(T \to r) \wedge (r \to p) \wedge (p \wedge r \to w) \wedge (w \wedge v \to \perp)$$

Βήμα 1 – Μάρκαρε όλα τα r:

$$(T \to \overline{r}) \wedge (\overline{r} \to p) \wedge (p \wedge \overline{r} \to w) \wedge (w \wedge v \to \perp)$$

Βήμα 2 – Μάρκαρε το p:

$$(T \to \overline{r}) \wedge (\overline{r} \to \overline{p}) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{r} \to w) \wedge (w \wedge v \to \perp)$$

Βήμα 3 – Μάρκαρε το w:

$$(T \to \overline{r}) \wedge (\overline{r} \to \overline{p}) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{r} \to \overline{w}) \wedge (\overline{w} \wedge v \to \perp)$$

Βήμα 4 – Επέστρεψε ότι η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη.

Τερματισμός Διαδικασίας

Θεώρημα 7: Ο αλγόριθμος τερματίζει.

- Μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

Τερματισμός: Κλήση του αλγόριθμου σε πρόταση με m μη-μαρκαρισμένες ατομικές προτάσεις θα τερματίσει σε ≤ m επαναλήψεις.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο m. Παρατηρούμε ότι σε κάθε επανάληψη, εφόσον ο αλγόριθμος δεν τερματίζει, μαρκάρεται μία ατομική πρόταση και επομένως σε κάθε επανάληψη ο αριθμός μη-μαρκαρισμένων ατομικών προτάσεων μειώνεται κατά 1.

Ορθότητα Διαδικασίας

Θεώρημα 8: Αν η ατομική πρόταση p μαρκαριστεί κατά τη διάρκεια της n- ιοστής επανάληψης της εκτέλεσης του αλγορίθμου στην πρόταση ϕ, τότε αν θέσουμε $[[p]] = F$ έχουμε επίσης $[[\phi]] = F$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n.

Θεώρημα 9: Satisfy_Horn(ϕ)= satisfiable αν και μόνο αν η πρόταση ϕ είναι ικανοποιήσιμη.

Απόδειξη: Απονομή της τιμής T σε όλες τις ατομικές προτάσεις που έχουν μαρκαριστεί και της τιμής F στις υπόλοιπες οδηγεί σε ικανοποίηση της αρχικής πρότασης.

Χρονική Πολυπλοκότητα Διαδικασίας Satisfy_Horn: $O(n^2)$ όπου n ο αριθμός των εμφανίσεων ατομικών προτάσεων στην πρόταση.

Resolution – Επίλυση

- Αλγοριθμική μέθοδος μέσω της οποίας μπορούμε να δείξουμε ότι μια πρόταση είναι έγκυρη / μη ικανοποιήσιμη.
- Επίλυση
  - Κατάλληλη για χρήση από υπολογιστή (μόνο 1 κανόνας, 0 αξιώματα)
  - Δυνατόν να μην τερματίζει σε κάποια δεδομένα
- J. Alan Robinson 1965
  - Αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων (theorem proving)
- Λογικός Προγραμματισμός: Robert Kowalski
- Prolog: Alain Colmerauer 1973
- Prolog compiler: David Warren, 1997
- Constraint Logic Programming: Jaffar and Lassez, 1987

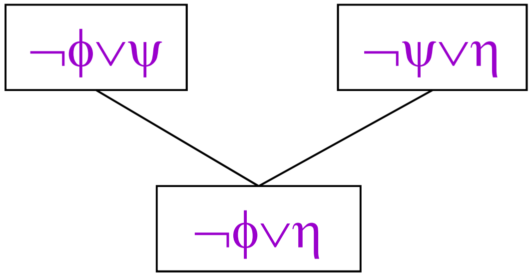
Βασική Ιδέα

- Έστω η πρόταση $(\neg\phi\vee\psi) \wedge (\neg\psi\vee\eta)$.
  - Αν η ψ είναι αληθής τότε η ορθότητα της πρότασης βασίζεται στην ορθότητα της η
  - Αν η ψ είναι ψευδής τότε η ορθότητα της πρότασης βασίζεται στην ορθότητα της ϕ

- Η ψ μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής, όχι και τα δύο. Επομένως αν και οι δύο προτάσεις $(\neg\phi\vee\psi)$, $(\neg\psi\vee\eta)$ είναι αληθείς πρέπει να ισχύει η πρόταση $(\neg\phi\vee\eta)$ η οποία ονομάζεται επιλύουσα (resolvent) των δύο προτάσεων.

- Παρόμοια, αν η επιλύουσα πρόταση $(\neg\phi\vee\eta)$ είναι ψευδής τότε τουλάχιστον μία από τις προτάσεις $(\neg\phi\vee\psi)$ και $(\neg\psi\vee\eta)$ είναι ψευδής και επομένως η σύζευξη $(\neg\phi\vee\psi) \wedge (\neg\psi\vee\eta)$ είναι επίσης ψευδής.

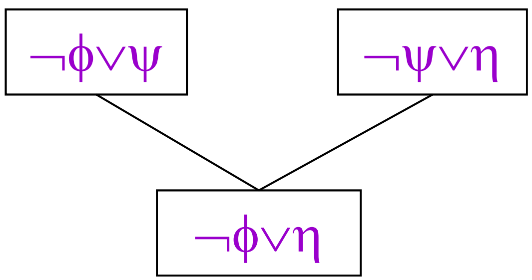
Βασική Ιδέα (συν.)



Αν είναι και οι δύο προτάσεις αληθείς

↓

Τότε πρέπει να είναι και η επιλύουσα αληθής



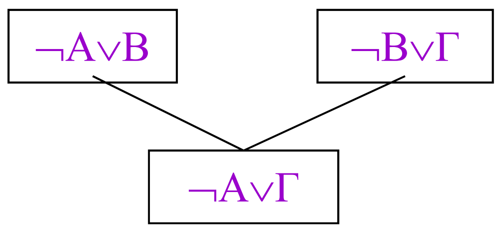
Τότε μία από τις δύο προτάσεις είναι ψευδής

↑

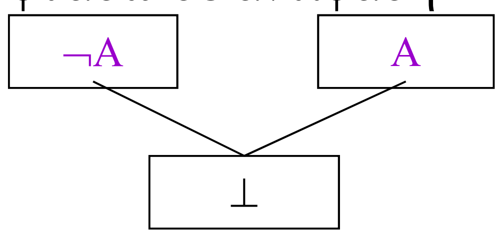
Αν η επιλύουσα είναι ψευδής

Βασική Ιδέα (συν.)

- Έστω πρόταση ψ. Είναι η ψ έγκυρη;
- Υποθέτω ότι η πρόταση ¬ψ είναι ικανοποιήσιμη και επιδιώκω να εντοπίσω σε αυτήν αντίφαση.
- Επανειλημμένα “ακυρώνω” αντίθετους όρους από την πρότασή μου



και επιδιώκω να φθάσω σε αντίφαση $\perp$



την οποία ονομάζουμε διάψευση (refutation) της υπόθεσης.

- Αυτό συνεπάγεται ότι η πρόταση ¬ψ δεν είναι ικανοποιήσιμη επομένως η πρόταση ψ είναι έγκυρη.

(Αν δεν διαψεύσουμε την υπόθεση τότε η ψ δεν είναι έγκυρη.)

Προτασιακή Μορφή στον ΠΛ

- Στοιχείο (literal): Μια ατομική πρόταση ή η άρνηση μιας ατομικής πρότασης.
- Δύο στοιχεία L και ¬L ονομάζονται συμπληρωματικά.
- Προτασιακό σύνολο: ένα σύνολο στοιχείων που αντιπροσωπεύουν μια διάζευξη π.χ. το σύνολο {p,¬q, p} αντιπροσωπεύει τη διάζευξη $p \vee \neg q \vee p$
- Προτασιακή Μορφή (clausal form): Ένα σύνολο από προτασιακά σύνολα που αντιπροσωπεύουν μια πρόταση σε ΚΣΜ (Κανονική Συζευκτική Μορφή) π.χ. η προτασιακή μορφή της ΚΣΜ πρότασης $(p \vee \neg q \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee q)$ είναι το {{p, ¬q, q},{p, ¬ q, ¬ r, q}}.
- Μια πρόταση του Προτασιακού Λογισμού μπορεί να γραφτεί σε προτασιακή μορφή ως εξής:
  - Υπολόγισε την ΚΣΜ της πρότασης
  - Μετάτρεψε την πρόταση στο σύνολο που την αντιπροσωπεύει.

Η Αρχή της Επίλυσης

- Έστω προτασιακά σύνολα C_1 και C_2 και συμπληρωματικά στοιχεία L_1 και L_2 τέτοια ώστε $L_1 \in C_1$ και $L_2 \in C_2$. Τότε το προτασιακό σύνολο $(C_1 - \{L_1\}) \cup (C_2 - \{L_2\})$ ονομάζεται επιλύουσα των C_1 και C_2.

- Παράδειγμα:

  Το $\{B,E\}$ είναι επιλύουσα των $C_1 = \{A, B\}$ και $C_2 = \{\neg A, E\}$.

  Το $\{B, \neg C, C\}$ είναι επιλύουσα των $C_1 = \{A, B, \neg C\}$ και $C_2 = \{\neg A, C\}$. Το $\{B\}$ όχι.

  Τα $C_1 = \{A\}$ και $C_2 = \{\neg A\}$ έχουν ως επιλύουσα το κενό σύνολο. Συμβολίζουμε την κενή επιλύουσα με $\perp$.

Θεώρημα: Αν το D είναι επιλύουσα των C_1 και C_2 τότε $C_1 \wedge C_2 \models D$

Κανόνας της Επίλυσης

$$\frac{a_1 \vee \ldots \vee a_{\mathrm{i-1}} \vee \mathrm{c} \vee a_{\mathrm{i+1}} \vee \ldots \vee a_n \quad b_1 \vee \ldots \vee b_{\mathrm{i-1}} \vee \neg\, \mathrm{c} \vee b_{\mathrm{i+1}} \vee \ldots \vee b_n}{a_1 \vee \ldots \vee a_{\mathrm{i-1}} \vee a_{\mathrm{i+1}} \vee \ldots \vee a_n \vee b_1 \vee \ldots \vee b_{\mathrm{i-1}} \vee b_{\mathrm{i+1}} \vee \ldots \vee b_n}$$

Διαδικασία Επίλυσης

Δεδομένο Εισόδου: Προτασιακή Μορφή S

Δεδομένο Εξόδου: Η λογική τιμή που εκφράζει κατά πόσο η S είναι ικανοποιήσιμη

Διαδικασία:

```
S₀ = S₁ = S;
i = 0;
while (Sᵢ ≠ Sᵢ₊₁ ή i = 0){
     {(C₁, C₂)} = {ζεύγη προτασιακών συνόλων από Sᵢ
                 που δεν έχει επιλεχθεί μέχρι στιγμής};
     C =  {οι επιλύουσες των δύο συνόλων};
     if ⊥ ∈ C     return μη ικανοποιήσιμο
     else
          Sᵢ₊₁ = Sᵢ; Sᵢ₊₂ = Sᵢ₊₁ ∪ C;
          i++
}
return ικανοποιήσιμο
```

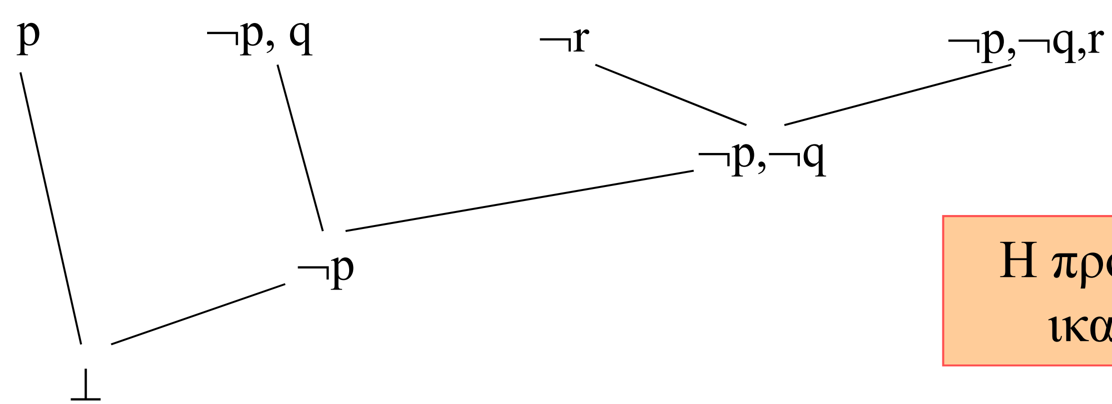
Παράδειγμα

- Να χρησιμοποιήσετε τη Διαδικασία Επίλυσης για να αποφασίσετε κατά πόσο η πρόταση $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ είναι μη ικανοποιήσιμη.

- Η πρόταση αυτή αντιστοιχεί στην προτασιακή μορφή

$$\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg r\}, \{\neg p, \neg q, r\}\}$$

- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την εκτέλεση της διαδικασίας και συγκεκριμένα τη διαδικασία εύρεσης διάψευσης μέσω του πιο κάτω δένδρου:



Η πρόταση είναι μη ικανοποιήσιμη.

Ορθότητα και Πληρότητα

- Θεώρημα Ορθότητας: Αν ο όρος ⊥ ληφθεί από ένα σύνολο όρων κατά τη διαδικασία επίλυσης, τότε το σύνολο αυτό είναι μη ικανοποιήσιμο.

- Θεώρημα Πληρότητας: Αν ένα σύνολο όρων είναι μη ικανοποιήσιμο τότε ο όρος ⊥ μπορεί να ληφθεί από τη διαδικασία επίλυσης.

Παράδειγμα

- Να εφαρμόσετε τη μέθοδο της Επίλυσης για να αποφασίσετε την εγκυρότητα του συλλογισμού “Αν H_1, H_2, H_3 και H_4 τότε C” όπου:

  H_1 = Αν σπουδάσει Θετικές Επιστήμες θα έχει καλό μισθό

  H_2 = Αν σπουδάσει Τέχνες θα έχει καλή κοινωνική ζωή

  H_3 = Αν έχει καλό μισθό ή καλή κοινωνική ζωή τότε θα είναι ικανοποιημένη

  H_4 = Δεν είναι ικανοποιημένη

  C = Δεν έχει σπουδάσει Θετικές Επιστήμες ή Τέχνες.

Παράδειγμα – Βήμα 1

Βήμα 1: Γράψε τις προτάσεις σε γλώσσα προτασιακού λογισμού.

Οι προτάσεις μπορούν να γραφτούν χρησιμοποιώντας τις ατομικές προτάσεις ΘΕ, ΚΜ, Τ, ΚΖ, και Ι ως εξής:

$$H_1 = \text{ΘΕ} \rightarrow \text{ΚΜ}$$

$$H_2 = \text{Τ} \rightarrow \text{ΚΖ}$$

$$H_3 = (\text{ΚΜ} \vee \text{ΚΖ}) \rightarrow \text{Ι}$$

$$H_4 = \neg \text{Ι}$$

$$C = \neg(\text{ΘΕ} \vee \text{Τ})$$

Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο ο συλλογισμός $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \rightarrow C$ είναι έγκυρος.

Θα δείξουμε ότι η άρνηση του συλλογισμού δεν είναι ικανοποιήσιμη.

$$\begin{aligned} \neg (H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \rightarrow C) &= \neg [\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4) \vee C] \\ &= \neg\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4) \wedge \neg C \\ &= H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge \neg C \end{aligned}$$

Παράδειγμα – Βήμα 2

Βήμα 2: Κατασκευή προτασιακού συνόλου

Η πρόταση $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4 \wedge \neg C$ μεταφράζεται σε ΚΣΜ ως εξής:

$(\neg ΘΕ \vee ΚΜ) \wedge (\neg Τ \vee ΚΖ) \wedge (\neg(ΚΜ \vee ΚΖ) \vee Ι) \wedge \neg Ι \wedge (ΘΕ \vee Τ)$

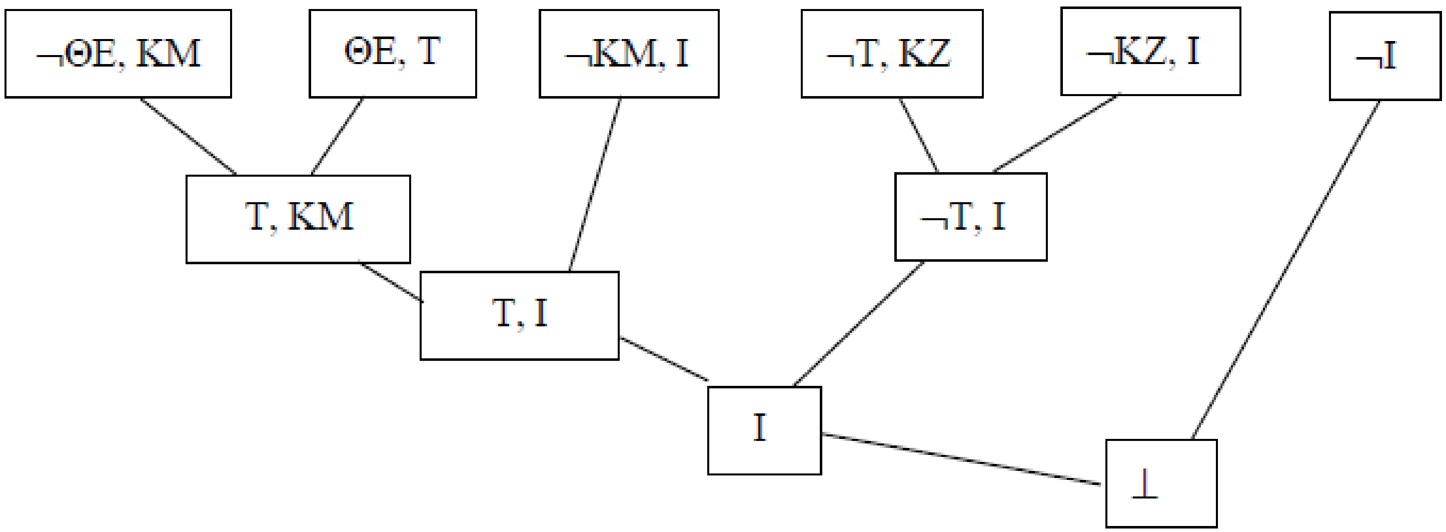
$= (\neg ΘΕ \vee ΚΜ) \wedge (\neg Τ \vee ΚΖ) \wedge ((\neg ΚΜ \wedge \neg ΚΖ) \vee Ι) \wedge \neg Ι \wedge (ΘΕ \vee Τ)$

$= (\neg ΘΕ \vee ΚΜ) \wedge (\neg Τ \vee ΚΖ) \wedge (\neg ΚΜ \vee Ι) \wedge (\neg ΚΖ \vee Ι) \wedge \neg Ι$

$\wedge (ΘΕ \vee Τ)$

Παράδειγμα – Βήμα 3

Βήμα 3: Εφαρμογή της Μεθόδου της Επίλυσης



Η διάψευση της πρότασης (της άρνησης του συλλογισμού) μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι ο αρχικός συλλογισμός είναι έγκυρος.