

Φροντιστήριο 4, 2/10/19

Άσκηση 1

Έστω η πρόταση $\forall x \forall y \exists z (R(x,y) \rightarrow R(y,z))$. Σε ποια από τα πιο κάτω μοντέλα ικανοποιείται;

(α) $A = \{a, b, c, d\}$, $R^A = \{(b,c), (d,a), (a,b), (d,d)\}$.

(β) $A = \{a, b, c\}$, $R^A = \{(b,c), (c,a), (a,b)\}$.

Άσκηση 2

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σημασιολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν αποδεικνύοντας τις απαντήσεις σας.

(α) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$

(β) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \models \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$

(γ) $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)) \models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$

Άσκηση 3

Να θεωρήσετε τις προτάσεις (1) – (6) που ακολουθούν και να αποφασίσετε κατά πόσο ισχύουν οι σχέσεις στον πίνακα που αφορούν τις προτάσεις. Αν μια πρόταση ισχύει να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία του Τάρσκι, διαφορετικά να παρουσιάσετε μοντέλο στο οποίο η σχέση να είναι ψευδής.

(1) $\forall x \forall y Q(x,y)$

(2) $\exists x \forall y Q(x,y)$

(3) $\forall x (P(x) \vee R(x))$

(4) $\forall x P(x) \vee \forall x R(x)$

(5) $\forall x (P(x) \vee \forall y Q(x,y))$

(6) $\forall x P(x) \vee \forall x \forall y Q(x,y)$

(1) $\rightarrow$ (2)
(2) $\rightarrow$ (1)
(3) $\rightarrow$ (4)
(4) $\rightarrow$ (3)
(5) $\rightarrow$ (6)
(6) $\rightarrow$ (5)

Άσκηση 4

(α) Να γράψετε πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν ακριβώς 3 στοιχεία.

(β) Να γράψετε πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν το πολύ 3 στοιχεία.

(γ) Είναι δυνατό να διατυπωθεί πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων;