

Φροντιστήριο 3, 25/09/19

Άσκηση 1

Έστω ϕ η πρόταση $\exists x (P(y,z) \wedge (\forall y (\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$.

(α) Ποιες εμφανίσεις των μεταβλητών της πρότασης είναι ελεύθερες και ποιες είναι δεσμευμένες;

(β) Έστω οι όροι w , $f(x)$ και $g(y,z)$.

(i) Να υπολογίσετε τα: $\phi[w/x]$, $\phi[w/y]$, $\phi[f(x)/y]$, $\phi[g(y,z)/z]$.

(ii) Ποια από τα w , $f(x)$ και $g(y,z)$ είναι αντικαταστάσιμα για τη μεταβλητή x στην πρόταση ϕ .

(iii) Ποια από τα w , $f(x)$ και $g(y,z)$ είναι αντικαταστάσιμα για τη μεταβλητή y στην πρόταση ϕ .

(iv) Ποιο είναι το βεληνεκές του ποσοδείκτη $\exists x$ στην πρόταση ϕ ; Στην πρόταση $\exists x P(y,z) \wedge (\forall x (\neg Q(y,x) \vee P(y,z)))$;

Άσκηση 2

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

(α) $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

(β) $t_1 = t_2 \vdash (t + t_1) = (t + t_2)$

Άσκηση 3

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

(α) $\phi \rightarrow \forall x Q(x) \vdash \forall x (\phi \rightarrow Q(x))$ δεδομένου ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ϕ .

(β) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash (\forall x \neg Q(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))$

(γ) $\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)$

(δ) $\exists x \phi \vee \exists x \psi \vdash \exists x (\phi \vee \psi)$

(ε) $\exists x (\phi \vee \psi) \vdash \exists x \phi \vee \exists x \psi$

(ζ) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)), \forall y (P(y) \rightarrow R(y)) \vdash \exists x (R(x) \wedge Q(x))$

Άσκηση 4

Θεωρήστε το λογικό επακόλουθο

$$\exists x R(x,x), \forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,y)) \rightarrow x = y] \vdash \exists x \forall y (R(y,y) \rightarrow x = y)$$

Η απόδειξη που ακολουθεί για το λογικό επακόλουθο είναι λανθασμένη. Να εντοπίσετε όλα τα σημεία/γραμμές της απόδειξης που περιέχουν λάθη και να εξηγήσετε σύντομα γιατί είναι λανθασμένα.

1.	$\exists x R(x,x)$	προϋπόθεση
2.	a $R(a,a)$	υπόθεση
3.	$R(a,a) \wedge R(a,a)$	$\wedge i$ 2, 2
4.	$\forall x \forall y [(R(x, y) \wedge R(y, y)) \rightarrow x = y]$	προϋπόθεση
5.	$\forall y [(R(a, y) \wedge R(y, y)) \rightarrow a = y]$	$\forall x e$ 4
6.	$(R(a, a) \wedge R(a, a)) \rightarrow a = a$	$\forall y e$ 5
7.	$a = a$	MP 3, 6
8.	$R(a, a) \rightarrow a = a$	$\rightarrow i$ 2, 7
9.	$\forall y (R(y, y) \rightarrow a = y)$	$\forall y i$ 8
10.	$\exists x \forall y (R(y, y) \rightarrow x = y)$	$\exists x i$ 9
11.	$\exists x \forall y (R(y,y) \rightarrow x = y)$	$\exists x e$ 1 2-10

Είναι ορθό ή όχι το λογικό επακόλουθο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.