

Φροντιστήριο 1, 11/09/19

Άσκηση 1

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

- (α) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$
- (β) $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- (γ) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (δ) $\neg(\neg p \vee q) \vdash p$
- (ε) $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$
- (ζ) $p \rightarrow (\neg p \vee r), \neg r \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Άσκηση 2

Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι σημασιολογικά ισοδύναμες με την $p \rightarrow (q \vee r)$;

- (α) $q \vee (\neg p \vee r)$
- (β) $q \wedge (\neg r \rightarrow p)$
- (γ) $p \wedge (\neg r \rightarrow q)$
- (δ) $\neg q \wedge (\neg r \rightarrow \neg p)$

Άσκηση 3

Ένα σύνολο από τελεστές C του Προτασιακού Λογισμού είναι *επαρκές* αν για κάθε πρόταση ϕ υπάρχει ισοδύναμη πρόταση ψ όπου η ψ χρησιμοποιεί μόνο τελεστές από το σύνολο C . Για παράδειγμα, το σύνολο $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές αφού κάθε εμφάνιση των τελεστών $\rightarrow$ και $\wedge$ μπορεί να αντικατασταθεί μέσω των ισοδυναμιών

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \psi &\equiv \neg \phi \vee \psi \\ \phi \wedge \psi &\equiv \neg (\neg \phi \vee \neg \psi)\end{aligned}$$

- (α) Να δείξετε ότι τα σύνολα $\{\neg, \rightarrow\}$ και $\{\rightarrow, \perp\}$ είναι επαρκή σύνολα τελεστών.
- (β) Να δείξετε ότι για να είναι ένα υποσύνολο των τελεστών $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp\}$ επαρκές πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα από τους τελεστές $\neg$ και $\perp$.
- (γ) Το σύνολο $\{\neg, \leftrightarrow\}$ είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών;