Φροντιστήριο 9 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Παρατηρούμε ότι η αμετάβλητη συνθήκη του βρόχου είναι η "z = x·a". Βάσει αυτού η απόδειξη έχει ως εξής:

$\{true\}$	
$\{0 = x \cdot 0\}$	Συνεπαγωγή
a := 0;	
$\{0 = x \cdot a\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
z := 0;	
$\{z = x \cdot a\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
while (a != y){	
$\{z = x \cdot a \wedge a \neq y\}$	Αμετάβλητη συνθήκη και Φρουρός
$\{z + x = x \cdot (a + 1)\}$	Κανόνας Ενδυνάμωσης Προσυνθήκης
z := z + x;	
$\{z = x \cdot (a + 1)\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
a := a + 1;	
$\{z = x \cdot a\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
}	
$\{z = x \cdot a \wedge a = y\}$	Κανόνας partial-while
$\{z=x \cdot y\}$	Συνεπαγωγή

Η προδιαγραφή δεν ισχύει με την έννοια της ολικής ορθότητας αφού για $y<0$ το πρόγραμμα δεν τερματίζει. Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε $\{y \geq 0\}$ Mult $\{z = x \cdot y\}$

Άσκηση 2

Παρατηρούμε ότι η αμετάβλητη συνθήκη του βρόχου είναι η "y = x – a" και μεταβλητή έκφραση η "a". Βάσει αυτού, η απόδειξη έχει ως εξής:

$\{x \geq 0\}$	
$\{0 = x - x \wedge x \geq 0\}$	Συνεπαγωγή
`a := x;`	
$\{0 = x - a \wedge a \geq 0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`y := 0;`	
$\{y = x - a \wedge a \geq 0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης
`while (a != 0){`	
$\{y = x - a \wedge a \neq 0 \wedge 0 \leq a = E_0\}$	Αμ. συνθήκη, Μετ. Εκφρ. και Φρουρός
$\{y + 1 = x - a + 1 \wedge 0 \leq a - 1 < E_0\}$	Συνεπαγωγή
`y := y+1;`	
$\{y = x - a + 1 \wedge 0 \leq a - 1 < E_0\}$	Αξίωμα Ανάθεσης

```
a := a-1;
```

$\{y = x - a \wedge 0 \leq a < E_0\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
}
```

$\{y = x - a \wedge \neg\neg a = 0\}$ Κανόνας total-while

$\{x = y\}$ Συνεπαγωγή

<u>Άσκηση 3</u>

Μεταβλητή έκφραση του προγράμματος είναι η x – y ενώ αμετάβλητη συνθήκη είναι απλά η πρόταση True. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$\{x \geq 0\}$

$\{True \wedge 0 \leq x - 0\}$ Συνεπαγωγή

```
y := 0;
```

$\{True \wedge 0 \leq x - y\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
while (y != x){
```

$\{True \wedge \neg\, y = x \wedge 0 \leq x - y \leq E_0\}$ Φρουρός, Μετ. έκφρ. και Αμ. Συνθήκη

$\{True \wedge 0 \leq x - (y + 1) < E_0\}$ Συνεπαγωγή

```
y := y+1;
```

$\{True \wedge 0 \leq x - y < E_0\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
}
```

$\{True \wedge \neg\, y \,!\!= x\}$ Κανόνας total-while

$\{y = x\}$ Συνεπαγωγή

Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη του while loop μετατρέπεται σε x<y. Τότε η απόδειξη θα είχε ως εξής:

Μεταβλητή έκφραση του προγράμματος είναι και πάλι η x – y ενώ αμετάβλητη συνθήκη είναι η πρόταση $y \leq x$. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$\{x \geq 0\}$

$\{0 \leq x \wedge 0 \leq x - 0\}$ Συνεπαγωγή

```
y := 0;
```

$\{y \leq x \wedge 0 \leq x - y\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
while (y < x){
```

$\{y \leq x \wedge y < x \wedge 0 \leq x - y \leq E_0\}$ Φρουρός, Μετ. έκφρ. και Αμ. Συνθήκη

$\{y+1 \leq x \wedge 0 \leq x - (y + 1) < E_0\}$ Συνεπαγωγή

```
y := y+1;
```

$\{y \leq x \wedge 0 \leq x - y < E_0\}$ Αξίωμα Ανάθεσης

```
}
```

$\{y \leq x \wedge \neg\, y < x\}$ Κανόνας total-while

$\{y = x\}$ Συνεπαγωγή

Επομένως, η προσυνθήκη $\{x \geq 0\}$ είναι και πάλι απαραίτητη για την ορθότητα του προγράμματος.

Σημειώνεται ότι αν και το πρόγραμμα τερματίζει ακόμα και για x<0, η προδιαγραφή {true} Copy2 {y=x} δεν είναι αληθής, αφού για x<0 το πρόγραμμα δεν παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα {y = x} όπως απαιτείται στη μετασυνθήκη.

Άσκηση 3

Θα αποδείξουμε την ολική ορθότητα της προδιαγραφής χρησιμοποιώντας ως αμετάβλητη συνθήκη και μεταβλητή έκφραση τις πιο κάτω:

η = "$\forall j,\ 0 \leq j < i,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i \leq n$"

E = "$n - i$"

$\{n>0\}$

$\{\forall j,\ 0 \leq j < 1,\ \mathrm{A}[0] \leq \mathrm{A}[j] \wedge 0 \leq n-1\}$ Συνεπαγωγή

```
k := 0;
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < 1,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge 0 \leq n-1\}$ Αξ. Ανάθεσης

```
i := 1;
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge 0 \leq n-i\}$ Αξ. Ανάθεσης

```
while (i < n){
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i \leq n \wedge i < n \wedge 0 \leq n-i = \mathrm{E}_0\}$

Αμ. Συνθήκη, Φρουρός και Μετ. Έκφραση

$\{(\mathrm{A}[i]<\mathrm{A}[k]) \rightarrow \forall j,\ 0 \leq j < i+1, \mathrm{A}[i] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i+1 \leq n \wedge 0 \leq n-i-1 < \mathrm{E}_0)$

$\wedge\{(\mathrm{A}[i]\geq\mathrm{A}[k]) \rightarrow \forall j,\ 0 \leq j < i+1,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i+1 \leq n \wedge 0 \leq n-i-1 < \mathrm{E}_0)\}$

Συνεπαγωγή

```
if  (A[i] < A[k])
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i+1,\ \mathrm{A}[i] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i+1 \leq n \wedge 0 \leq n-i-1 < \mathrm{E}_0\}$

```
k = i;
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i+1,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i+1 \leq n \wedge 0 \leq n-i-1 < \mathrm{E}_0\}$ Αξ. Ανάθεσης

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i+1,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i+1 \leq n \wedge 0 \leq n-i-1 < \mathrm{E}_0\}$ Κανόνας if

```
i := i+1;
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i \leq n \wedge 0 \leq n-i < \mathrm{E}_0\}$ Αξ. Ανάθεσης

```
}
```

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i \leq n \wedge i \geq n\}$ Κανόνας total-while

$\{\forall j,\ 0 \leq j < i,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j] \wedge i = n\}$ Συνεπαγωγή

$\{\forall j,\ 0 \leq j < n,\ \mathrm{A}[k] \leq \mathrm{A}[j]\}$ Συνεπαγωγή

Άσκηση 5

Η εντολή `for(C1;B;C2){C3}` μπορεί να διατυπωθεί ως:

```
C1;
while B{
       C3;
       C2;
}
```

Η πιο πάνω ισοδυναμία μας επιτρέπει να προτείνουμε κανόνα για την ανάλυση προδιαγραφών για την εντολή for ως εξής:

$$\frac{\{\psi\}\ C_1\ \{\varphi\},\ \{\varphi \wedge B\}\ C_3;C_2\ \{\varphi\}}{\{\psi\}\quad for(C_1;B;C_2)\{C_3\}\quad \{\varphi \wedge \neg B\}} \qquad \text{for - loop}$$