Φροντιστήριο 6 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

a. Αν κάποιο κουμπί κλήσης του ανελκυστήρα πατηθεί στον τρίτο όροφο, τότε ο ανελκυστήρας θα μεταβεί στον όροφο αυτό.

$\mathbf{G}\ (\ pressup_3 \vee pressdown_3 \rightarrow \mathbf{F}\ at_3\ )$

b. Ο ανελκυστήρας δεν βρίσκεται ποτέ ταυτόχρονα στον πρώτο και τον δεύτερο όροφο.

$\mathbf{G}\ (\neg\ (at_1 \wedge\ at_2))$

c. Αν ο ανελκυστήρας δεν βρίσκεται σε κίνηση, τότε η πόρτα του είναι ανοικτή.

$\mathbf{G}\ (stop \rightarrow open)$

d. Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σταματημένος στον τέταρτο όροφο θα παραμείνει εκεί μέχρι να πατηθεί κάποιο κουμπί.

$\mathbf{G}\ [\ (at_4 \wedge stop)$
$\rightarrow$
$(\ (at_4 \wedge stop)\ \mathbf{U}\ ((\vee_{1\leq i\leq n}\ press\_up_i) \vee (\vee_{1\leq i\leq n}\ press\_down_i) \vee (\vee_{1\leq i\leq n}\ \ press_i))\ )]$

e. Αν ο ανελκυστήρας εγκλωβιστεί ανάμεσα σε δύο ορόφους, τότε θα σημάνει συναγερμός μέχρι ο ανελκυστήρας να κινηθεί ξανά.

$\mathbf{G}\ \mathbf{[}((\vee_{1\leq i<n}\ between_i) \wedge stop) \rightarrow (alarm\ \mathbf{U}\ (go\_up \vee go\_down))\ \mathbf{]}$

Άσκηση 2

1. **F** y	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
2. **G** y	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
3. **G F** y	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
4. **G** g	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
5. **G** ¬ b	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.
6. b **U** ¬ b	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 2, 3, και 4.
7. **F** g	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1 και 3.
8. ¬ b **U F** b	Ικανοποιείται στην κατάσταση 4.
9. g **U** (y **U** r)	Ικανοποιείται στην κατάσταση 1.
10. g **U** ¬y	Ικανοποιείται στις καταστάσεις 1, 3, και 4.
11. **G** (g **U** (y ∧ **F** b))	Δεν ικανοποιείται σε καμιά κατάσταση.

Άσκηση 3

1. $\mathbf{G}\, p \quad \equiv \quad \neg\, \mathbf{F} \neg\, p$

   Αληθές από τον ορισμό του τελεστή **G.**

2. $\mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p \quad \equiv \quad \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$

   Έστω μονοπάτι s. Τότε

   $s \models \mathbf{X}\,\mathbf{F}\, p$ αν και μόνο αν $s^1 \models \mathbf{F}\, p$
   αν και μόνο αν $s^1 \models \text{true}\ \mathbf{U}\ p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$ και για κάθε $1 \leq k < j$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

   και

   $s \models \mathbf{F}\,\mathbf{X}\, p$ αν και μόνο αν $s \models \text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{X}\, p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{X}\, p$ και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models \mathbf{X}\, p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $(s^j)^1 \models p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^{j+1} \models p$
   αν και μόνο αν υπάρχει $j \geq 1$ τέτοιο ώστε $s^j \models p$

   Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

3. $(\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q) \quad \equiv \quad \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$

   Έστω μονοπάτι s. Τότε

   $s \models (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, p) \wedge (\mathbf{F}\,\mathbf{G}\, q)$ αν και μόνο αν $s \models (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, p) \wedge (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν $s \models (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, p)$ και $s \models (\text{true}\ \mathbf{U}\ \mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν υπάρχουν $i,j \geq 0$ τέτοια ώστε $s^i \models \mathbf{G}\, p$ και $s^j \models \mathbf{G}\, q$ και για κάθε $0 \leq k < i,j$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν υπάρχουν $i,j \geq 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $k \geq i$, $s^k \models p$ και για κάθε $l \geq j$ $s^l \models q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ ($m = \max(i,j)$) τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq m$ $s^n \models p$ και $s^n \models q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^m \models \mathbf{G}\, p$ και $s^m \models \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^m \models \mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q$
   αν και μόνο αν υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^m \models (\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}q)$ και για κάθε $0 \leq k <$, $s^k \models \text{true}$
   αν και μόνο αν $s \models \text{true}\ \mathbf{U}\ (\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$
   αν και μόνο αν $s \models \mathbf{F}\,(\mathbf{G}\, p \wedge \mathbf{G}\, q)$

   Προφανώς οι δύο ιδιότητες ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια μονοπάτια και επομένως η ισοδυναμία ισχύει.

4. $(p\ \mathbf{U}\ q)\ \mathbf{U}\ q \quad \equiv \quad p\ \mathbf{U}\ q$

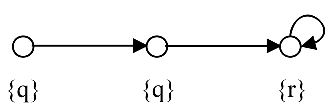
Θα θεωρήσουμε τις δύο κατευθύνσεις ξεχωριστά.

Έστω μονοπάτι s, τέτοιο ώστε, $s \models (p\ \mathbf{U}\ q)\ \mathbf{U}\ q$. Τότε έχουμε,
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models (p\ \mathbf{U}\ q)$.
Έστω i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $s^i \models q$. Τότε
$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq k < i$, $s^k \models (p\ \mathbf{U}\ q)$,
δηλαδή,
$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq k < i$, υπάρχει $m \geq k$ τέτοιο ώστε $s^m \models q$ (*)
και για κάθε $0 \leq n < m$ $s^n \models p$.
Αφού το i είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $s^i \models q$, από το (*) συμπεράνουμε
$s^i \models q$ και για κάθε $0 \leq n < i$, $s^n \models p$
Επομένως, συμπεραίνουμε ότι
$s \models p\ \mathbf{U}\ q$.

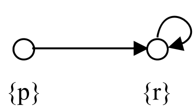
Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο μονοπάτι s, ισχύει ότι, $s \models p\ \mathbf{U}\ q$. Τότε έχουμε,
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$.
Επιπλέον ισχύει ότι
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, ($\exists m = j$ τέτοιο ώστε $s^m \models q$ και για κάθε $k \leq n < m$, $s^n \models p$).
Συνεπώς έχουμε ότι
υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$ $s^k \models p\ \mathrm{U}\ q$
που συνεπάγεται ότι
$s \models (p\ \mathbf{U}\ q)\ \mathbf{U}\ q$
και το ζητούμενο έπεται.

5. $(p\ \mathbf{U}\ q) \wedge (q\ \mathbf{U}\ r) \quad \equiv \quad (p\ \mathbf{U}\ r)$

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς καμιά κατεύθυνση. Η πιο κάτω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα $(p\ \mathbf{U}\ q) \wedge (q\ \mathbf{U}\ r)$ αλλά όχι την $(p\ \mathbf{U}\ r)$.

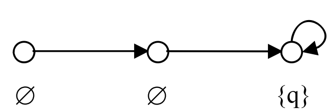


Η πιο κάτω δομή δεν ικανοποιεί την $(p\ \mathbf{U}\ q) \wedge (q\ \mathbf{U}\ r)$ αλλά ικανοποιεί την $(p\ \mathbf{U}\ r)$.



6. $\mathbf{G}\ p \vee \mathbf{F}\ q \quad \equiv \quad (\mathbf{G}\ p) \vee (p\ \mathbf{U}\ q)$

Η ισοδυναμία δεν ισχύει προς την κατεύθυνση $\Rightarrow$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω αντιπαράδειγμα.



Η ισοδυναμία ισχύει προς την κατεύθυνση $\Leftarrow$. Απόδειξη:

Έστω μονοπάτι s. Τότε

Αν $s \models (\mathbf{G}\, p) \vee (p\, \mathbf{U}\, q)$ τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή $s \models (p\, \mathbf{U}\, q)$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$ και για κάθε $0 \leq k < j$, $s^k \models p$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή υπάρχει $j \geq 0$ τέτοιο ώστε $s^j \models q$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p$ ή υπάρχει $s \models F\, q$

τότε $s \models \mathbf{G}\, p \vee F\, q$

Επομένως το ζητούμενο έπεται.