

Φροντιστήριο 4 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Έστω η πρόταση $\forall x \forall y \exists z (R(x,y) \rightarrow R(y,z))$.

(α) Η πρόταση δεν ικανοποιείται στο μοντέλο $A = \{a, b, c, d\}$, $R^A = \{(b,c), (d,a), (a,b), (d,d)\}$ αφού $(b,c) \in R^A$ αλλά δεν υπάρχει ζεύγος $(c, -) \in R^A$.

(β) Η πρόταση ικανοποιείται στο μοντέλο $A = \{a, b, c\}$, $R^A = \{(b,c), (c,a), (a,b)\}$ αφού μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι κάθε ζεύγος στοιχείων που συνδέονται μέσω της σχέσης R^A είναι τέτοιο ώστε το δεύτερο από τα δύο στοιχεία να συνδέεται με τη σειρά του με κάποιο άλλο στοιχείο.

Άσκηση 2

(α) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \models \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Αυτό φαίνεται στην ερμηνεία

A = σύνολο των φυσικών αριθμών

$P^A(x) = 0$ x είναι άρτιος

$Q^A(x) = 0$ x είναι περιττός

(β) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \models \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$

Η συνεπαγωγή είναι αληθής. Θεωρήστε οποιοδήποτε μοντέλο M της πρότασης $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ με σύμπαν το A και ερμηνείες των κατηγορημάτων P και Q τα P^A και Q^A . Τότε, από την Αλήθεια του Tarski:

Για οποιοδήποτε $a \in A$ ισχύει $M \models_{s[x \mapsto a]} P(x) \wedge Q(x)$

Από τη σημασιολογία της $\wedge$ συμπεραίνουμε ότι για οποιοδήποτε $a \in A$, $M \models_{s[x \mapsto a]} P(x)$

Συνεπώς, $M \models_s \forall x P(x)$.

Παρόμοια, συμπεραίνουμε ότι $M \models_s \forall x Q(x)$ και επομένως το μοντέλο ικανοποιεί τη σύζευξη των δύο προτάσεων, δηλαδή $M \models_s \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$.

(γ) $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)) \models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$

Η σημασιολογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη. Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι δεν είναι έγκυρη. Τότε, για κάποιο μοντέλο M

$M \models \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))$ (1) και $\neg M \models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$ (2)

Από το (2) συμπεραίνουμε ότι

όχι $M \models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$

επομένως, υπάρχει κάποιο a τέτοιο ώστε

όχι $M \models P(a) \rightarrow \exists y Q(y)$

Κατά συνέπεια,

$M \models P(a)$ (3)

και όχι $M \models \exists y Q(y)$ (4)

Από το (1) συμπεραίνουμε ότι

$$M \models \exists y (P(a) \rightarrow Q(y))$$

και επομένως, υπάρχει b τέτοιο ώστε

$$M \models \neg P(a) \vee Q(b)$$

Αφού όμως γνωρίζουμε από το (3) ότι $M \models P(a)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$M \models Q(b) \text{ και επομένως}$$

$$M \models \exists y Q(y). \quad (5)$$

Από τα (4) και (5) οδηγούμαστε σε αντίφαση. Συνεπώς η σημασιολογική συνεπαγωγή είναι έγκυρη.

Άσκηση 3

(1) $\rightarrow$ (2)

Η συνεπαγωγή είναι αληθής και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο μοντέλο M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\forall x \forall y Q(x,y)$. Τότε, από την Αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι $M \models Q^A(a,b)$ για κάθε $a, b \in A$. Επομένως, $M \models Q^A(a,b)$ για κάποιο $a \in A$ και κάθε $b \in A$. Αυτό συνεπάγεται ότι $M \models \forall y Q^A(a,y)$ για κάποιο $a \in A$ και $M \models \exists x \forall y Q^A(a,y)$.

(2) $\rightarrow$ (1)

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο

Σύμπαν Σ : οι θετικοί ακέραιοι (συμπεριλαμβανομένου του 0)

$$Q(x,y): x \leq y$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση (2) αφού $0 \leq y$ για κάθε θετικό ακέραιο y , αλλά δεν ισχύει η πρόταση (1).

(3) $\rightarrow$ (4)

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο

Σύμπαν Σ : οι θετικοί ακέραιοι

$$P(x): \text{ο } x \text{ είναι άρτιος}$$

$$Q(x): \text{ο } x \text{ είναι περιττός}$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση (3) αφού κάθε ακέραιος είναι είτε θετικός είτε άρτιος, αλλά δεν ικανοποιείται η πρόταση (4) αφού δεν ισχύει ότι όλοι οι ακέραιοι είναι άρτιοι ούτε και ότι όλοι οι ακέραιοι είναι περιττοί.

(4) $\rightarrow$ (3)

Η συνεπαγωγή είναι αληθής και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο μοντέλο M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\forall x P(x) \vee \forall x R(x)$. Τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι $M \models \forall x P(x)$ ή $M \models \forall x R(x)$. Επομένως, $M \models P^M(a)$ για κάθε $a \in A$ ή $M \models R^M(a)$ για κάθε $a \in A$.

- Αν ισχύει ότι $M \models P^M(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε $M \models P^M(a) \vee R^M(a)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models \forall x (P^M(x) \vee R^M(x))$.

- Εναλλακτικά, αν ισχύει ότι $M \models R^M(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε $M \models P^M(a) \vee R^M(a)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models \forall x (P^M(x) \vee R^M(x))$.

Και στις δύο περιπτώσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $M \models \forall x (P^M(x) \vee R^M(x))$. Επομένως, στο μοντέλο M ικανοποιείται η πρόταση $\forall x (P(x) \vee R(x))$ και το ζητούμενο έπεται.

(5) $\rightarrow$ (6)

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο

Σύμπαν Σ : οι θετικοί ακέραιοι (συμπεριλαμβανομένου του 0)

$P(x)$: ο x είναι άνισος με το 0

$Q(x,y)$: $x \leq y$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση (5) αλλά δεν ικανοποιείται η πρόταση (6).

(6) $\rightarrow$ (5)

Η συνεπαγωγή είναι αληθής και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο μοντέλο M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\forall x P(x) \vee \forall x \forall y Q(x,y)$. Τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι $M \models \forall x P^M(x)$ ή $M \models \forall x \forall y Q^M(x,y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν ισχύει ότι $M \models P^M(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε $M \models P^M(a) \vee \forall y Q^M(a,y)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models \forall x (P^M(x) \vee \forall y Q^M(x,y))$.
- Εναλλακτικά, αν ισχύει ότι $M \models \forall x \forall y Q^M(x,y)$ τότε $M \models \forall y Q^M(a,y)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models P^M(a) \vee \forall y Q^M(a,y)$ που συνεπάγεται ότι $M \models \forall x (P^M(x) \vee \forall y Q^M(x,y))$.

Και στις δύο περιπτώσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $M \models \forall x (P^M(x) \vee \forall y Q^M(x,y))$. Επομένως, στο μοντέλο M ικανοποιείται η πρόταση $\forall x (P(x) \vee \forall y Q(x,y))$ και το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 3

(α) Η πιο κάτω πρόταση του ΚΛ αληθεύει σε μοντέλα που έχουν ακριβώς 3 στοιχεία.

$$\phi_{=3} = \exists x \exists y \exists z [\neg (x=y) \wedge \neg (x=z) \wedge \neg (y=z) \wedge \forall w ((x=w) \vee (y=w) \vee (z=w))]$$

(β) Γράφουμε

$$\phi_{=2} = \exists x \exists y [\neg (x=y) \wedge \forall w ((x=w) \vee (y=w))]$$

$$\phi_{=1} = \exists x \forall w (x=w)$$

Η ζητούμενη πρόταση είναι η $\phi_{=1} \vee \phi_{=2} \vee \phi_{=3}$

(γ) Μια πρόταση του κατηγορηματικού λογισμού η οποία αληθεύει σε μοντέλα που έχουν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων θα είχε την μορφή

$$\phi_{=1} \vee \phi_{=2} \vee \phi_{=3} \vee \dots$$

Αφού όμως ο κατηγορηματικός λογισμός δεν μας επιτρέπει να γράφουμε διαζεύξεις με μη πεπερασμένο αριθμό υποπροτάσεων η ζητούμενη πρόταση είναι αδύνατο να προσδιοριστεί στη γλώσσα αυτή.