Φροντιστήριο 3 – Λύσεις Ασκήσεων

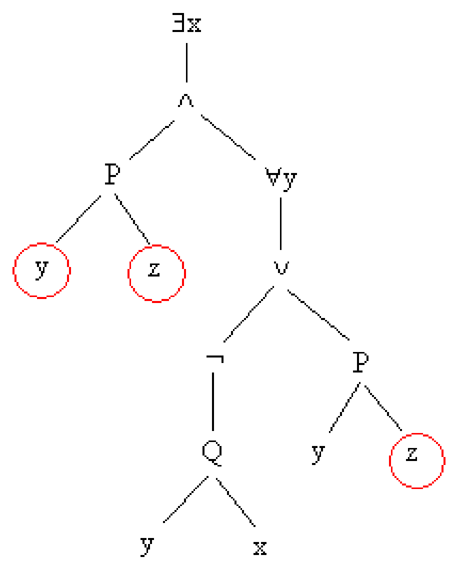
Άσκηση 1

Έστω ϕ η πρόταση $\exists x\, (P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$.

(α) Με κόκκινο φαίνονται οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών:

$$\exists x\, (P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$$

Οι εμφανίσεις αυτές παρουσιάζονται επίσης και στο δένδρο που αντιστοιχεί στην πρόταση πιο κάτω. Οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών δεν έχουν ως πρόγονο κάποιο σχετικό ποσοδείκτη.



(β) (i) $\phi[w/x] = \phi$ (Το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση)

$\phi[w/y] = \exists x\, (P(w,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$

$\phi[f(x)/y] = \exists x\, (P(f(x), z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$

$\phi[g(y,z)/z] = \exists x\, (P(y, g(y,z)) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y, g(y,z)))))$

(ii) Εφόσον η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην πρόταση ϕ, τα w, f(x) και g(y,z) είναι αντικαταστίσιμα για τη x στην πρόταση.

(iii) Τα w, και g(y,z) είναι αντικαταστίσιμα για τη μεταβλητή y στην πρόταση ϕ.Το f(x) όχι.

(iv) Το βεληνεκές των ποσοδεικτών φαίνεται σκιασμένο πιο κάτω.

$\exists x\, (P(y,z) \wedge (\forall y(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$

$\exists x\, P(y,z) \wedge (\forall x(\neg Q(y,x) \vee P(y,z))))$

Άσκηση 2

(α) $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

1.	$(y = 0) \wedge (y = x)$	προϋπόθεση
2.	$y = 0$	$\wedge_e$ 1
3.	$y = x$	$\wedge_e$ 1
4.	$0 = x$	$=_e$ 3, 2 όπου ϕ η πρόταση $z = x$

(β) $t_1 = t_2 \vdash (t + t_1) = (t + t_2)$

1.	$t_1 = t_2$	προϋπόθεση
2.	$t + t_1 = t + t_1$	$=_i$
3.	$t + t_1 = t + t_2$	$=_e$ 1, 2 όπου ϕ η πρόταση $t + t_1 = t + x$

Άσκηση 3

(α) $\phi \to \forall x\, Q(x) \vdash \forall x\, (\phi \to Q(x))$ δεδομένου ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ϕ.

1.	$\phi \to \forall x\, Q(x)$	προϋπόθεση
2.	x_0	
3.	ϕ	προσωρινή υπόθεση
4.	$\forall x\, Q(x)$	MP 1, 3
5.	$Q(x_0)$	$\forall x_e$ 4
6.	$(\phi \to Q(x_0))$	$\to_i$ 3-5
7.	$\forall x\, (\phi \to Q(x))$	$\forall x_i$ 2-6

(β) $\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \vdash (\forall x\, \neg Q(x)) \to (\forall x\, \neg P(x))$

1.	$\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\forall x\, \neg Q(x)$	προσωρινή υπόθεση
3.	x_0	
4.	$\neg Q(x_0)$	$\forall x_e$ 2
5.	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x_e$ 1
6.	$\neg P(x_0)$	MT 4, 5
7.	$\forall x\, \neg P(x)$	$\forall x_i$ 3-6
8.	$(\forall x\, \neg Q(x)) \to (\forall x\, \neg P(x))$	$\to_i$ 2-7

(γ) $\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)$

1.		$\exists x \forall y P(x,y)$	προϋπόθεση
2.	y_0		
3.	x_0	$\forall y P(x_0,y)$	υπόθεση
4.		$P(x_0,y_0)$	$\forall y_e$ 3
5.		$\exists x P(x,y_0)$	$\exists x_i$ 4
6.		$\exists x P(x,y_0)$	$\exists x_e$ 1,3-5
7.		$\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall y_i$ 2-6

(δ) $\exists x \phi \vee \exists x \phi \vdash \exists x (\phi \vee \psi)$

1.		$\exists x \phi \vee \exists x \phi$	προϋπόθεση			
2.		$\exists x \phi$	υπόθεση		$\exists x \phi$	υπόθεση
3.	x_0	$\phi[x_0/x]$	υπόθεση	x_0	$\psi[x_0/x]$	υπόθεση
4.		$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$	$\vee_{i\,1}$ 3		$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$	$\vee_{i\,2}$ 3
5.		$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x_i$ 4		$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x_i$ 4
6.		$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x_e$ 2, 3-5		$\exists x (\phi \vee \psi))$	$\exists x_e$ 2,3-5
7.		$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\vee_e$ 1, 2-6			

(ε) $\exists x\,(\phi \vee \psi) \vdash \exists x\,\phi \vee \exists x\,\phi$

1.	$\exists x\,(\phi \vee \psi)$	προϋπόθεση		
2.	x_0 $(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	υπόθεση		
3.	$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$			
4.	$\phi[x_0/x]$	υπόθεση	$\psi[x_0/x]$	υπόθεση
5.	$\exists x\,\phi$	$\exists x_i$ 4	$\exists x\,\psi$	$\exists x_i$ 4
6.	$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$	$\vee_i$ 5	$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$	$\vee_i$ 5
7.	$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$	$\vee_e$ 3, 4-6		
8.	$\exists x\,\phi \vee \exists x\,\psi$	$\exists_e$ 1, 2-7		

(ζ) $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)),\ \forall y\,(P(y) \rightarrow R(y)) \vdash \exists x\,(R(x)$ Ù $Q(x))$

1.	$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	προϋπόθεση
2.	$\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y))$	προϋπόθεση
3.	x_0 $P(x_0) \wedge Q(x_0)$	υπόθεση
4.	$P(x_0) \rightarrow R(x_0)$	$\forall y$ e 2
5.	$P(x_0)$	$\wedge$ e_1 4
6.	$R(x_0)$	MP 4, 5
7.	$Q(x_0)$	$\wedge$ e_2 3
8.	$R(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\wedge$ i 6,7
9.	$\exists x\,(R(x) \wedge Q(x))$	$\exists x$ i 8
10.	$\exists x\,(R(x) \wedge Q(x))$	$\exists x$ e 1,3-10

Άσκηση 4

Υπάρχουν σφάλματα στις γραμμές 8 και 9.

Το σφάλμα της γραμμής 8 οφείλεται στο γεγονός ότι, για να εισαχθεί μια συνεπαγωγή, πρέπει να υπάρχει ένα κουτί που αρχίζει με την υπόθεση της συνθήκης της συνεπαγωγής και τελειώνει με το συμπέρασμά της. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει όταν εισάγεται η συνεπαγωγή στη γραμμή αυτή.

Το σφάλμα της γραμμής 9 οφείλεται στο γεγονός ότι η εισαγωγή του καθολικού ποσοδείκτη βασίζεται στο γεγονός ότι η τιμή a ικανοποιεί την ιδιότητα $R(a, a) \to a = a$ (γραμμή 8). Ωστόσο, το a δεν είναι μια νέα μεταβλητή αλλά μια τιμή για την οποία υπάρχει μια συγκεκριμένη υπόθεση (γραμμή 2). Επομένως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο τύπος της γραμμής 8 ισχύει για όλες τις τιμές y όπως υποδεικνύεται εσφαλμένα στη γραμμή 9.

Το επακόλουθο είναι λανθασμένο. Ως αντιπαράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε ως σύμπαν τους ακέραιους και ως το κατηγόρημα R τη σχέση της ισότητας. Τότε, αν και ισχύουν οι προϋποθέσεις:

$$\exists x\ x=x,\ \forall x \forall y\ [(x = y \wedge y = y) \to x = y]$$

Αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα

$$\exists x \forall y\ (y = y \to x = y)$$