

Φροντιστήριο 2 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Λαμβάνουμε το αποτέλεσμα συνδυάζοντας τις γραμμές του πίνακα όπου η πρόταση παίρνει την τιμή F.

p	q	r	φ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

$$\begin{aligned}\phi &\equiv \neg[(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)] \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)\end{aligned}$$

Άσκηση 2

$$\begin{aligned}(\alpha) \neg(p \rightarrow (\neg(q \wedge (\neg p \rightarrow q)))) &= \neg(p \rightarrow (\neg(q \wedge (\neg \neg p \vee q)))) \\ &= \neg(p \rightarrow (\neg(q \wedge (\neg \neg p \vee q)))) \\ &= \neg(\neg p \vee (\neg(q \wedge (\neg \neg p \vee q)))) \\ &= \neg \neg p \wedge \neg(\neg(q \wedge (\neg \neg p \vee q))) \\ &= p \wedge (q \wedge (p \vee q)) \\ &= p \wedge (q \vee p) \wedge q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta) (p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2) \vee (p_3 \wedge q_3) &= (((p_1 \wedge q_1) \vee p_2) \wedge ((p_1 \wedge q_1) \vee q_2)) \vee (p_3 \wedge q_3) \\ &= ((p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)) \vee (p_3 \wedge q_3) \\ &= \phi_1 \vee (p_3 \wedge q_3) \quad \text{όπου } \phi_1 = (p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2) \\ &= (\phi_1 \vee p_3) \wedge (\phi_1 \vee q_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 \vee p_3 &= ((p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)) \vee p_3 \\ &= (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee p_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 \vee q_3 &= ((p_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee q_2)) \vee q_3 \\ &= (p_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee q_3)\end{aligned}$$

Τελική απάντηση:

$$\begin{aligned}(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge \\ (p_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee q_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee q_3) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee q_3)\end{aligned}$$

Άσκηση 3

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να δείξουμε ότι η πρόταση

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg p)$$

είναι ικανοποιήσιμη.

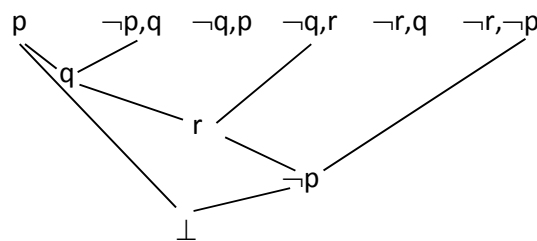
Μετατροπή σε CNF:

$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg p)$$

Προτασιακή Μορφή:

$$\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg q, r\}, \{\neg r, q\}, \{\neg r, \neg p\}$$

Μέθοδος της Επίλυσης:



Η Μέθοδος της Επίλυσης μας έχει οδηγήσει σε διάψευση. Επομένως, η πρόταση είναι μη ικανοποιήσιμη.

(β) Μια πρόταση είναι έγκυρη αν και μόνο αν η άρνησή της δεν είναι ικανοποιήσιμη. Επομένως, για να απαντήσουμε το ερώτημα, θα θεωρήσουμε την άρνηση της πρότασης και εφαρμόζοντας τη Μέθοδο της Επίλυσης θα ελέγξουμε κατά πόσο αυτή είναι ικανοποιήσιμη.

$$\begin{aligned} \neg ([(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)] \rightarrow s) \\ \equiv \neg ([\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \rightarrow s) \\ \equiv \neg (\neg [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \vee s) \\ \equiv \neg \neg [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \wedge \neg s \\ \equiv [\neg(p \vee q) \vee (\neg r \vee s)] \wedge \neg s \\ \equiv [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee s)] \wedge \neg s \\ \equiv (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee s) \wedge \neg s \end{aligned}$$

Σε προτασιακή μορφή η πρόταση έχει ως εξής:

$$\{\neg p, \neg r, s\}, \{\neg q, \neg r, s\}, \{\neg s\}$$

Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο της Επίλυσης παρατηρούμε ότι δεν μας οδηγεί σε διάψευση. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη. Για παράδειγμα οι λογικές τιμές $p = T, q = T, r = F, s = F$ κάνουν την πρόταση $\neg ([(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)] \rightarrow s)$ αληθή. Κατά συνέπεια, η αρχική πρόταση είναι μη έγκυρη.

Άσκηση 4

Οι προτάσεις σε Προτασιακό Λογισμό:

Προϋπόθεση (φ1): $\neg A \rightarrow (L \vee C)$

Προϋπόθεση (φ2): $(\neg L \wedge \neg C) \rightarrow O$

Προϋπόθεση (φ3): $\neg L$

Συμπέρασμα (ψ): $\neg C \rightarrow (A \wedge O)$

Όπου:

A: Ο Σωκράτης ενέκρινε τους νόμους.

L: Ο Σωκράτης έφυγε από την Αθήνα.

C: Ο Σωκράτης προσπάθησε να αλλάξει τους νόμους

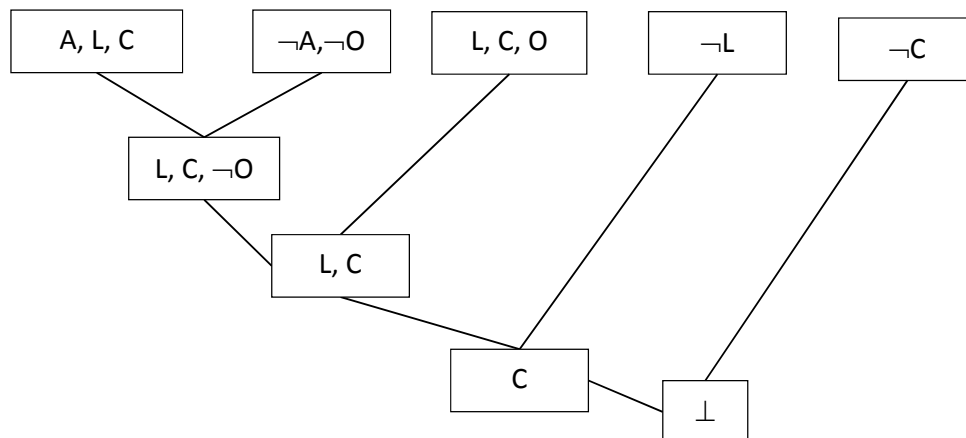
O: Ο Σωκράτης συμφώνησε να υπακούει τους νόμους

Μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι η πρόταση $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \rightarrow \psi$ είναι έγκυρη, το οποίο ισχύει αν και μόνο αν η άρνηση της πρότασης δεν είναι ικανοποιήσιμη. Επομένως, μεταφράζουμε την πρόταση $\neg[(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \rightarrow \psi]$ σε ΚΣΜ και εφαρμόζουμε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να την διαψεύσουμε, έτσι δείχνοντας ότι ο αρχικός συλλογισμός $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \rightarrow \psi$ είναι έγκυρος.

$$\begin{aligned} \neg[(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \rightarrow \psi] &= \neg[\neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \vee \psi] \\ &\equiv (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \wedge \neg \psi \\ &\equiv (\neg A \rightarrow (L \vee C)) \wedge ((\neg L \wedge \neg C) \rightarrow O) \wedge \neg L \wedge \neg(\neg C \rightarrow (A \wedge O)) \\ &\equiv (\neg \neg A \vee (L \vee C)) \wedge (\neg(\neg L \wedge \neg C) \vee O) \wedge \neg L \wedge \neg(\neg \neg C \vee (A \wedge O)) \\ &\equiv (A \vee L \vee C) \wedge (L \vee C \vee O) \wedge (\neg L) \wedge \neg(C \vee (A \wedge O)) \\ &\equiv (A \vee L \vee C) \wedge (L \vee C \vee O) \wedge (\neg L) \wedge (\neg C \wedge \neg(A \wedge O)) \\ &\equiv (A \vee L \vee C) \wedge (L \vee C \vee O) \wedge (\neg L) \wedge (\neg C) \wedge (\neg A \vee \neg O) \end{aligned}$$

Μέθοδος της Επίλυσης

$\{A, L, C\}, \{L, C, O\}, \{\neg L\}, \{\neg C\}, \{\neg A, \neg O\}$



Αφού διαψεύσαμε την πρόταση $\neg[(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \rightarrow \psi]$ η $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \rightarrow \psi$ είναι έγκυρη.