

Φροντιστήριο 1 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

(α) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

- | | |
|---------------------------|-----------------|
| 1. p | προϋπόθεση |
| 2. $\neg\neg(q \wedge r)$ | προϋπόθεση |
| 3. $\neg\neg p$ | $\neg\neg i$ 1 |
| 4. $q \wedge r$ | $\neg\neg e$ 2 |
| 5. r | $\wedge e_2$ 4 |
| 6. $\neg\neg p \wedge r$ | $\wedge i$ 3, 5 |

(β) $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

- | | |
|---|---------------------|
| 1. $q \rightarrow r$ | προσωρινή υπόθεση |
| 2. $\neg q \rightarrow \neg p$ | προσωρινή υπόθεση |
| 3. p | προσωρινή υπόθεση |
| 4. $\neg\neg p$ | $\neg\neg i$ 3 |
| 5. $\neg\neg q$ | MT 2, 4 |
| 6. q | $\neg\neg e$ 5 |
| 7. r | MP 1, 6 |
| 8. $p \rightarrow r$ | $\rightarrow i$ 3-7 |
| 9. $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | $\rightarrow i$ 2-8 |
| 10. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ | $\rightarrow i$ 1-9 |

(γ) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	προϋπόθεση
2.	p	$\wedge e_1$ 1
3.	$q \vee r$	$\wedge e_2$ 1
4.	q	προσωρινή υπόθεση
5.	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2, 4
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_1$ 5
7.	r	προσωρινή υπόθεση
8.	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2, 7
9.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_2$ 8
10.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

(δ) $\neg(\neg p \vee q) \vdash p$

1.	$\neg(\neg p \vee q)$	προϋπόθεση
2.	$\neg p$	προσωρινή υπόθεση
3.	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 1, 3
5.	$\neg\neg p$	$\neg i$ 2-4
6.	p	$\neg\neg e$ 5

(ε) $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

1.	$p \rightarrow q$	προϋπόθεση
2.	$p \vee \neg p$	LEM
3.	p	προσωρινή υπόθεση
4.	q	MP 1, 3
5.	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 4
6.	$\neg p$	προσωρινή υπόθεση
7.	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 6
8.	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 2, 3-5, 6-7

(ζ) $p \rightarrow (\neg p \vee r), \neg r \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

1. $p \rightarrow (\neg p \vee r)$ προϋπόθεση

2. $\neg r$ προϋπόθεση

3. $\neg q$ προσωρινή υπόθεση

4. p προσωρινή υπόθεση

5. $\neg p \vee r$ MP

6. $\neg p$ προσωρινή υπόθεση

r προσωρινή υπόθεση

7. $\perp$ $\perp i$ 4, 6

8. r $\perp e$

9. r $\vee e$ 5, 8, 6

10. $\perp$ $\perp i$ 2, 9

11. $\neg p$ $\neg i$

12. $\neg q \rightarrow \neg p$ $\rightarrow i$ 3-11

Άσκηση 2

Γνωρίζουμε ότι δύο προτάσεις ϕ και ψ είναι σημασιολογικά ισοδύναμες αν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$. Αυτό συνεπάγεται ότι δυο σημασιολογικά ισοδύναμες προτάσεις είναι αληθείς για ακριβώς τις ίδιες αναθέσεις τιμών των ατομικών προτάσεων που περιέχουν.

Στην προκειμένη περίπτωση, ισοδύναμη προς τη δοθείσα πρόταση είναι η πρόταση (α) και μπορούμε να το δούμε φτιάχνοντας τους πίνακες αλήθειας. Για τις άλλες τρεις προτάσεις παρατηρούμε ότι η αρχική πρόταση δεν προϋποθέτει την αλήθεια καμίας από τις p , q και $\neg q$.

Άσκηση 3

(1) Για να δείξουμε ότι το σύνολο τελεστών $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $\vee$ και $\wedge$ μπορούν να αντικατασταθούν μέσω ισοδυνάμων προτάσεων που χρησιμοποιούν μόνο τελεστές από το σύνολο. Οι ζητούμενες ισοδυναμίες είναι οι

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) = \neg(p \rightarrow \neg q)$$

Επαλήθευση των ισοδυναμιών μπορεί να γίνει μέσω πινάκων αλήθειας και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Για να δείξουμε ότι το σύνολο τελεστών $\{\rightarrow, \perp\}$ είναι επαρκές αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $\neg$, $\vee$ και $\wedge$ μπορούν να αντικατασταθούν μέσω ισοδυνάμων προτάσεων που χρησιμοποιούν μόνο τελεστές από το σύνολο. Οι ζητούμενες ισοδυναμίες είναι οι

$$\neg p \equiv p \rightarrow \perp$$

$$p \vee q \equiv (p \rightarrow \perp) \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \equiv \neg(p \rightarrow (q \rightarrow \perp)) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$$

Όπως και πριν, επαλήθευση των ισοδυναμιών μπορεί να γίνει εύκολα μέσω πινάκων αλήθειας.

(2) Θα αποδείξουμε ότι είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε τον τελεστή $\neg$ χρησιμοποιώντας τους τελεστές $\wedge, \vee, \rightarrow$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε πρόταση ϕ που περιέχει μια ατομική πρόταση p και τους τελεστές $\wedge, \vee, \rightarrow$ είναι τέτοια ώστε αν $[[p]] = T$ τότε $[[\phi]] = T$. Επομένως $\phi \neq \neg p$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της πρότασης ϕ .

- Αν ο αριθμός των τελεστών της ϕ είναι 0, τότε $\phi = p$ και προφανώς $\phi \neq \neg p$.
- Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε πρόταση με λιγότερους από k τελεστές.
- Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ϕ έχει ακριβώς k τελεστές. Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις.
 - $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Ισχύει ότι οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για $[[p]] = T$, $[[\phi_1]] = T$ και $[[\phi_2]] = T$. Συνεπώς, $[[\phi]] = T \vee T = T$.
 - $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Ισχύει ότι οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για $[[p]] = T$, $[[\phi_1]] = T$ και $[[\phi_2]] = T$. Συνεπώς, $[[\phi]] = T \wedge T = T$.
 - $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$. Ισχύει ότι οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για $[[p]] = T$, $[[\phi_1]] = T$ και $[[\phi_2]] = T$. Συνεπώς, $[[\phi]] = T \rightarrow T = T$.

Το ζητούμενο έπεται.

(3) Όχι, το σύνολο $\{\neg, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές σύνολο τελεστών. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο πίνακας αλήθειας οποιασδήποτε πρότασης ϕ με δύο ατομικές προτάσεις p και q , περιέχει άρτιο αριθμό γραμμών με την τιμή T και άρτιο αριθμό γραμμών με την τιμή F . Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της πρότασης ϕ και αφήνεται στον αναγνώστη.