

## Σειρά Προβλημάτων 5 – Λύσεις

### Άσκηση 1

Να αποφασίσετε κατά πόσο τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα είναι ορθά. Αν ένα επακόλουθο είναι ορθό να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας το σχετικό σύστημα κανόνων, διαφορετικά να δώσετε ερμηνεία στην οποία το επακόλουθο να είναι ψευδές.

(α)  $\vdash (p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p))$

(β)  $\forall x [P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))], \neg \exists x [\neg R(x) \wedge Q(x)] \vdash \forall x [(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$

(γ)  $\forall x \forall y [P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)], \neg P(a,b) \vdash P(b,a)$

### Λύση:

(α)

|     |                                                                                           |                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1.  | $p \rightarrow (q \vee r)$                                                                | πρ. υπόθεση           |
| 2.  | $\neg q$                                                                                  | πρ. υπόθεση           |
| 3.  | $\neg r$                                                                                  | πρ. υπόθεση           |
| 4.  | $p$                                                                                       | πρ. υπόθεση           |
| 5.  | $q \vee r$                                                                                | MP 1, 4               |
| 6.  | $q$ πρ. υπ.                                                                               | $r$ πρ. υπ.           |
| 7.  | $\perp$ $\neg e$ 2, 6                                                                     | $\perp$ $\neg e$ 2, 6 |
| 8.  | $\perp$                                                                                   | $\vee e$ 5, 6-7       |
| 9.  | $\neg p$                                                                                  | $\neg i$ 4-8          |
| 10. | $\neg r \rightarrow \neg p$                                                               | $\rightarrow i$ 3-9   |
| 11. | $\neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$                                          | $\rightarrow i$ 2-10  |
| 12. | $(p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p))$ | $\rightarrow i$ 1-11  |

(β)

|     |                                                 |                        |
|-----|-------------------------------------------------|------------------------|
| 1.  | $\forall x [P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))]$ | προϋπόθεση             |
| 2.  | $\neg \exists x [\neg R(x) \wedge Q(x)]$        | προϋπόθεση             |
| 3.  | $x_0$                                           |                        |
| 4.  | $P(x_0) \vee Q(x_0)$                            | πρ. υπόθεση            |
| 5.  | $\neg R(x_0)$                                   | πρ. υπόθεση            |
| 6.  | $Q(x_0)$                                        | πρ. υπόθεση            |
| 7.  | $\neg R(x_0) \wedge Q(x_0)$                     | $\wedge i$ 5,6         |
| 8.  | $\exists x [\neg R(x) \wedge Q(x)]$             | $\exists x i$ 7        |
| 9.  | $\perp$                                         | $\neg e$ 2, 8          |
| 10. | $\neg Q(x_0)$                                   | $\neg i$ 6-9           |
| 11. | $P(x_0)$                                        | πρ. υπόθεση            |
| 12. | $P(x_0) \rightarrow Q(x_0) \vee R(x_0)$         | $\forall x e$ 1        |
| 13. | $Q(x_0) \vee R(x_0)$                            | MP 12, 11              |
| 14. | $Q(x_0)$ πρ. υπ.                                | $R(x_0)$ πρ. υπ.       |
| 15. | $\perp$ $\neg e$ 10,14                          | $\perp$ $\neg e$ 5, 14 |
| 16. | $\perp$                                         | $\vee e$ 13, 14-15     |
| 17. | $\neg P(x_0)$                                   | $\neg e$ 11-16         |
| 18. | $P(x_0)$ πρ. υπ.                                | $Q(x_0)$ πρ. υπ.       |
| 19. | $\perp$ $\neg e$ 17, 18                         | $\perp$ $\neg e$ 10,18 |
| 20. | $\perp$                                         | $\vee e$ 4, 18-19      |
| 21. | $R(x_0)$                                        | $\neg e$ 5-20          |
| 22. | $(P(x_0) \vee Q(x_0)) \rightarrow R(x_0)$       | $\rightarrow i$ 4-21   |
| 23. | $\forall x [(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$ | $\forall x i$ 3-22     |

(γ) Το λογικό επακόλουθο δεν είναι ορθό. Για να το αποδείξουμε επικαλούμαστε το Θεώρημα της Ορθότητας του Κατηγορηματικού Λογισμού και παρουσιάζουμε το πιο κάτω αντιπαράδειγμα/μοντέλο στο οποίο ενώ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του επακόλουθου δεν ικανοποιείται το συμπέρασμα.

#### Μοντέλο

Σύμπαν: Οι άνθρωποι

Κατηγορημα  $P(x,y)$  : ο  $x$  είναι γονιός του  $y$

a: ο Αριστοτέλης

b: ο Βούδας

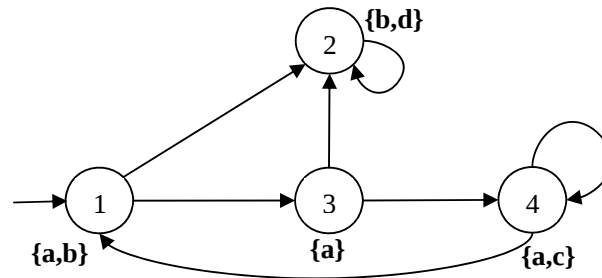
Παρατηρούμε ότι προφανώς για κάθε δύο ανθρώπους,  $x, y$ , αν ο  $x$  είναι γονιός του  $y$  τότε ο  $y$  δεν είναι γονιός του  $x$ , δηλαδή  $\forall x \forall y [P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)]$ . Επιπρόσθετα, ισχύει ότι ο Αριστοτέλης δεν είναι γονιός του Βούδα, δηλαδή  $\neg P(a,b)$ , αλλά δεν ισχύει  $P(b,a)$  αφού ούτε ο Βούδας είναι γονιός του Αριστοτέλη.

## Άσκηση 2

(α) Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις στον χρονικό λογισμό CTL.

- (i) Την επόμενη φορά που θα ισχύει το  $p$  θα ισχύει ταυτόχρονα και το  $q$ .
- (ii) Μετά το  $p$ , αν αυτό εμφανιστεί, το  $q$  δεν εμφανίζεται ποτέ ξανά.
- (iii) Ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο εμφανίσεις του  $p$  θα εμφανιστεί το  $q$ .
- (iv) Το  $p$  θα εμφανιστεί ακριβώς μια φορά.

(β) Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL για να ελέγξετε κατά πόσο η κατάσταση 1 της δομής ικανοποιεί την ιδιότητα που ακολουθεί.

$$AG A(a \cup b) \rightarrow EG EX A(a \cup d)$$

(γ) Για κάθε ένα από τα πιο κάτω ζεύγη ιδιοτήτων να ελέγξετε κατά πόσο οι ιδιότητες που περιέχει είναι ισοδύναμες δίνοντας είτε απόδειξη της ισοδυναμίας είτε κάποιο αντιπαράδειγμα.

- |                            |     |                           |
|----------------------------|-----|---------------------------|
| (i) $(F G p) \vee (F G q)$ | και | $F (G p \vee G q)$        |
| (ii) $G p \wedge F q$      | και | $(G p) \wedge (p \cup q)$ |

## Λύση

(α)

- (i) Την επόμενη φορά που θα ισχύει το  $p$  θα ισχύει ταυτόχρονα και το  $q$ .

$$A[\neg p \cup (p \wedge q)]$$

- (ii) Μετά το  $p$ , αν αυτό εμφανιστεί, το  $q$  δεν εμφανίζεται ποτέ ξανά.

$$\neg EF (p \wedge EF q)$$

- (iii) Ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο εμφανίσεις του  $p$  θα εμφανιστεί το  $q$ .

$$AG [p \rightarrow \neg EXE(\neg q \cup p)]$$

- (iv) Το  $p$  θα εμφανιστεί ακριβώς μια φορά.

$$A [\neg p \cup (p \wedge AXAG \neg p)]$$

(β) Αφού μετασχηματίσουμε κατάλληλα την ιδιότητα, δημιουργούμε το δέντρο που της αντιστοιχεί και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου.

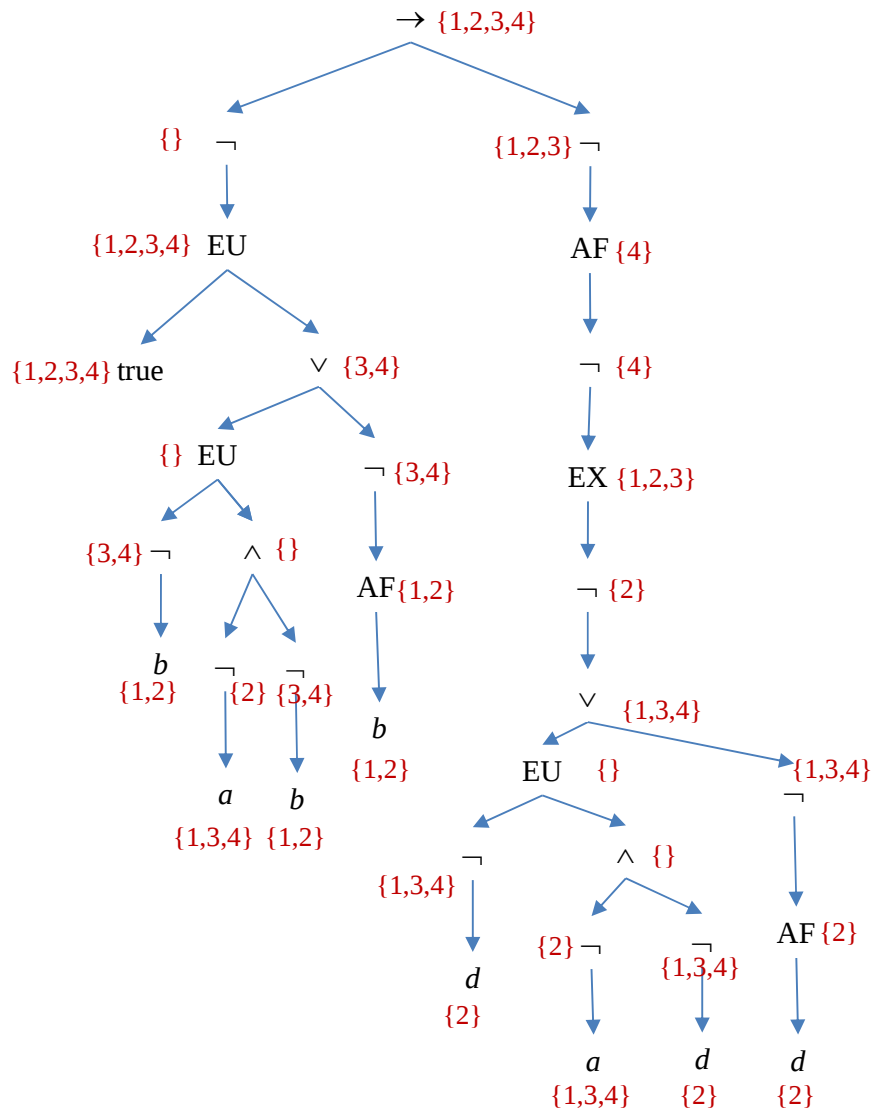
$$AG A(a \cup b) \rightarrow EG EX A(a \cup d)$$

$$\equiv \neg EF \neg A(a \cup b) \rightarrow \neg AF \neg EX A(a \cup d)$$

$$\equiv \neg EF \neg (E[\neg b \cup (\neg a \wedge \neg b)] \vee EG \neg b) \rightarrow \neg AF \neg EX \neg (E[\neg d \cup (\neg a \wedge \neg d)] \vee EG \neg d)$$

$$\equiv \neg E(\text{true} \cup (E[\neg b \cup (\neg a \wedge \neg b)] \vee \neg AF \neg b) \rightarrow \neg AF \neg EX \neg (E[\neg d \cup (\neg a \wedge \neg d)] \vee \neg AF \neg d)$$

$$\equiv \neg E(\text{true} \cup (E[\neg b \cup (\neg a \wedge \neg b)] \vee \neg AF b) \rightarrow \neg AF \neg EX \neg (E[\neg d \cup (\neg a \wedge \neg d)] \vee \neg AF d)$$



Παρατηρούμε ότι όλες οι καταστάσεις της δομής ικανοποιούν την ιδιότητα, συμπεριλαμβανομένης και της κατάσταση 1.

(γ) (i) Οι προτάσεις  $(F \ G \ p) \vee (F \ G \ q)$  και  $F \ (G \ p \vee G \ q)$  είναι ισοδύναμες. Ακολουθεί η απόδειξη.

Έστω δομή  $M$  με αρχική κατάσταση  $s$  και μονοπάτι  $w$  που ξεκινά από την  $s$ , τότε

$$w \models (F \ G \ p) \vee (F \ G \ q)$$

αν και μόνο αν  $w \models F \ G \ p$  ή  $w \models F \ G \ q$

αν και μόνο αν υπάρχει  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $w^i \models G \ p$

ή υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $w^j \models G \ q$

αν και μόνο αν υπάρχει  $k \geq 0$  ( $k = \max(i, j)$ ) τέτοιο ώστε

$$w^k \models G \ p \text{ ή } w^j \models G \ q$$

αν και μόνο αν  $w^k \models F \ (G \ p \vee G \ q)$

(ii) Οι προτάσεις  $G \ p \wedge F \ q$  και  $(G \ p) \wedge (p \ U \ q)$  είναι ισοδύναμες. Ακολουθεί η απόδειξη.

Έστω δομή  $M$  με αρχική κατάσταση  $s$  και μονοπάτι  $w$  που ξεκινά από την  $s$ , τότε

$w \models G p \wedge F q$

αν και μόνο αν  $w \models G p$  και  $w \models F q$

αν και μόνο αν για κάθε  $i \geq 0$  τ.ω.  $w^i \models p$  και υπάρχει  $j \geq 0$  τ.ω.  $w^j \models q$

αν και μόνο αν για κάθε  $i \geq 0$  τέτοιο ώστε  $w^i \models p$

και υπάρχει  $j \geq 0$  τέτοιο ώστε  $w^j \models q$  και για κάθε  $0 \leq i < j$   $w^i \models p$

αν και μόνο αν  $w \models G p$  και  $w \models p \cup q$

αν και μόνο αν  $w \models G p \wedge (p \cup q)$

### Άσκηση 3

(α) Να αποδείξετε την ορθότητα της προδιαγραφής  $\models_{\text{par}} \{\text{true}\} P \{v = x - y\}$  όπου ο κώδικας του  $P$  δίνεται πιο κάτω.

```
v := 0;
z := 0;
while (z != y){
    z := z+1;
    v := v-1;
}
v := v+x;
```

(β) Να εξηγήσετε γιατί η προδιαγραφή από το μέρος (α) δεν είναι ολικά ορθή επιδεικνύοντας συνθήκες κάτω από τις οποίες το πρόγραμμα  $P$  δεν τερματίζει.

(γ) Να εντοπίσετε προσυνθήκη  $A$  για την οποία το πρόγραμμα τερματίζει και να αποδείξετε ότι η προσυνθήκη αυτή πράγματι εγγυάται τον ορθό τερματισμό του προγράμματος, δηλαδή, να αποδείξετε την προδιαγραφή  $\models_{\text{tot}} \{A\} P \{v = x - y\}$ .

### Λύση:

(α) Η αμετάβλητη συνθήκη του βρόχου είναι η  $v = -z$  και η απόδειξη της προδιαγραφής έχει ως εξής:

|                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| $\{\text{true}\}$            |                              |
| $\{0 = -0\}$                 | Συνεπαγωγή                   |
| $v := 0;$                    |                              |
| $\{v = -0\}$                 | Αξ. Ανάθεσης                 |
| $z := 0;$                    |                              |
| $\{v = -z\}$                 | Αξ. Ανάθεσης                 |
| while (z != y){              |                              |
| $\{v = -z \wedge z \neq y\}$ | Αμετάβλητη Συνθήκη + Φρουρός |
| $\{v-1 = -z-1\}$             | Συνεπαγωγή                   |
| $z := z+1;$                  |                              |
| $\{v-1 = -z\}$               | Αξ. Ανάθεσης                 |
| $v := v-1;$                  |                              |
| $\{v = -z\}$                 | Αξ. Ανάθεσης                 |
| }                            |                              |
| $\{v = -z \wedge z = y\}$    | Κανόνας partial while        |
| $\{v + x = x - y\}$          | Συνεπαγωγή                   |
| $v := v+x;$                  |                              |
| $\{v = x - y\}$              | Αξ. Ανάθεσης                 |

(β) Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα δεν τερματίζει αν το  $y$  είναι αρνητικό.

(γ) Η κατάλληλη προσυνθήκη για ολική ορθότητα του προγράμματος είναι η  $y \geq 0$  και η σχετική απόδειξη έχει ως εξής:

|                                                      |                                  |
|------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\{0 \leq y\}$                                       |                                  |
| $\{0 = -0 \wedge 0 \leq y\}$                         | Συνεπαγωγή                       |
| $y := 0;$                                            |                                  |
| $\{y = -0 \wedge 0 \leq y-0\}$                       | Αξ. Ανάθεσης                     |
| $z := 0;$                                            |                                  |
| $\{y = -z \wedge 0 \leq y-z\}$                       | Αξ. Ανάθεσης                     |
| $\text{while } (z \neq y)\{$                         |                                  |
| $\{y = -z \wedge z \neq y \wedge 0 \leq y-z = E_0\}$ | Αμ. Συνθ. + Μετ. Εκφρ. + Φρουρός |
| $\{y-1 = -z-1 \wedge 0 \leq y-z-1 < E_0\}$           | Συνεπαγωγή                       |
| $z := z+1;$                                          |                                  |
| $\{y-1 = -z \wedge 0 \leq y-z < E_0\}$               | Αξ. Ανάθεσης                     |
| $y := y-1;$                                          |                                  |
| $\{y = -z \wedge 0 \leq y-z < E_0\}$                 | Αξ. Ανάθεσης                     |
| $\}$                                                 |                                  |
| $\{y = -z \wedge z=y\}$                              | Κανόνας total while              |
| $\{y+x = x-y\}$                                      | Συνεπαγωγή                       |
| $y := y+x;$                                          |                                  |
| $\{y = x-y\}$                                        | Αξ. Ανάθεσης                     |

#### Άσκηση 4

Έστω πλαίσιο  $F = (W, R)$ . Να αποδείξετε τα πιο κάτω:

(α) Αν η σχέση  $R$  είναι συμμετρική, τότε  $F \models \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ .

(β) Αν η σχέση  $R$  είναι μεταβατική, τότε  $F \models \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ .

#### Λύση:

(α) Ας υποθέσουμε ότι η  $R$  είναι συμμετρική. Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε μοντέλο  $M$  και κόσμο  $x$ ,  $x \models \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ .

Έστω μοντέλο  $M_0$  και κόσμος  $x_0$ , και ας υποθέσουμε ότι  $x_0 \models \varphi$ . Αν  $y_0 \in W$  είναι τέτοιο ώστε  $(x_0, y_0) \in R$ , τότε από τη συμμετρικότητα του  $R$ , ισχύει επίσης ότι  $(y_0, x_0) \in R$ . Επομένως, υπάρχει  $z$  (το  $x_0$ ) τέτοιο ώστε  $(y_0, z) \in R$  και  $z \models \varphi$ . Συνεπώς,  $y_0 \models \Diamond \varphi$ . Αφού αυτό ισχύει για κάθε  $y_0$ ,  $(x_0, y_0) \in R$ , συμπεραίνουμε ότι  $x_0 \models \Box \Diamond \varphi$ .

(β) Ας υποθέσουμε ότι η  $R$  είναι μεταβατική. Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε μοντέλο  $M$  και κόσμο  $x$ ,  $x \models \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ .

Έστω μοντέλο  $M_0$  και κόσμος  $x_0$ , και ας υποθέσουμε ότι  $x_0 \models \Box \varphi$ . Για να φτάσουμε σε αντίφαση, ας υποθέσουμε ότι όχι  $x_0 \models \Box \Box \varphi$ . Για να ισχύει ότι όχι  $x_0 \models \Box \Box \varphi$  θα πρέπει να υπάρχουν  $y_0, z_0$ , τέτοια ώστε  $(x_0, y_0), (y_0, z_0) \in R$  και όχι  $z_0 \models \varphi$ . Από τη μεταβατικότητα του

$R$ , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $(x_0, z_0) \in R$  και αφού  $x_0 \models \Box\phi$ ,  $z_0 \models \phi$ . Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ήταν εσφαλμένη.

Συνεπώς,  $x_0 \models \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$ .

### Άσκηση 5

Στο τελευταίο σας ταξίδι στο διάστημα έχετε καταφθάσει στον πλανήτη Illogis. Σύμφωνα με τον ταξιδιωτικό σας οδηγό, στον πλανήτη αυτό υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη ευφυών πλασμάτων: αυτά που λένε πάντα την αλήθεια και αυτά που πάντα ψεύδονται. Είναι αδύνατον να διαχωρίσει κάποιος ανάμεσα στα δύο είδη από την εμφάνισή τους.

(α) Στην πρώτη σας συνάντηση με δύο κατοίκους, τους  $P$  και  $Q$ , τους ρωτάτε: «Είναι κάποιος από εσάς ψεύτης;». «Τουλάχιστον ένας από εμάς είναι ψεύτης», απαντά ο  $P$ . Μπορείτε να γνωρίζετε τι είναι ο  $P$  και τι ο  $Q$ ; Να διατυπώσετε το πρόβλημα στον Προτασιακό Λογισμό και να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας.

(β) Συνεχίζοντας την περιδιάβασή σας, συναντάτε άλλους δύο κατοίκους  $A$  και  $B$  και ρωτάτε τον  $A$ : «Κάποιος από τους δυο σας που λέει πάντα την αλήθεια;» «Αν ο  $B$  είναι ψεύτης, τότε είμαι ψεύτης», απαντά ο  $A$ . Τι είναι οι  $A$  και  $B$ ; Να διατυπώσετε το πρόβλημα στον Προτασιακό Λογισμό και να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τους αποδεικτικούς κανόνες του Προτασιακού Λογισμού.

(γ) Το βράδυ αρχίζετε να ψάχνετε για καταφύγιο για τη νύχτα, αλλά είστε πολύ επιφυλακτικοί καθώς γνωρίζετε ότι ορισμένοι από τους κατοίκους είναι ανθρωποφάγοι. Συναντιέστε με τρεις κατοίκους,  $C$ ,  $D$ , και  $E$  και ακολουθεί η πιο κάτω συνομιλία.

Εσείς ρωτάτε τη  $C$ : *Πόσοι από εσάς τους τρεις λέτε την αλήθεια;*

$C$  (στη γλώσσα της): *Φι φορμ.*

Εσείς ρωτάτε τον  $D$ : *Τι είπε;*

$D$ : *Είπε ότι μόνο ένας από εμάς λέει την αλήθεια.*

$E$ : *Μην εμπιστεύεστε τον  $D$ , είναι ψεύτης. Ελάτε μαζί μου, δεν είμαι ανθρωποφάγος.*

$D$ : *Όχι, ελάτε μαζί μου, δεν είμαι ανθρωποφάγος.*

Τι πρέπει να κάνετε; Να διατυπώσετε το πρόβλημα στον Προτασιακό Λογισμό και να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας μέθοδο της επιλογής σας.

### Λύση:

(α) Για την αναπαράσταση του προβλήματος στον Προτασιακό Λογισμό, θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο κάτω ατομικές προτάσεις:

$A_P$ : ο  $P$  λέει την αλήθεια

$A_Q$ : ο  $Q$  λέει την αλήθεια

Επομένως, η απάντηση του  $P$  μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\neg(A_P \wedge A_Q)$$

Από τη στιγμή όμως που δεν γνωρίζουμε κατά πόσο ο  $P$  λέει την αλήθεια, μπορούμε να καταλήξουμε στο πιο κάτω το οποίο εκφράζει ότι αν ο  $P$  λέει την αλήθεια τότε η απάντησή του είναι αληθής ενώ αν είναι ψεύτης τότε η απάντησή του είναι ψευδής:

$$[A_P \rightarrow \neg(A_P \wedge A_Q)] \wedge [\neg A_P \rightarrow \neg\neg(A_P \wedge A_Q)]$$

Κτίζουμε τον πίνακα αλήθειας της πρότασης και αναζητούμε τη γραμμή (γραμμές) στις οποίες η πρόταση γίνεται αληθής

| $A_P$ | $A_Q$ | $[A_P \rightarrow \neg(A_P \wedge A_Q)] \wedge [\neg A_P \rightarrow (A_P \wedge A_Q)]$ |
|-------|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| T     | T     | F                                                                                       |
| T     | F     | T                                                                                       |
| F     | T     | F                                                                                       |
| F     | F     | F                                                                                       |

Παρατηρούμε ότι η πρόταση γίνεται αληθής στη δεύτερη γραμμή. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο P λέει την αλήθεια ενώ ο Q είναι ψεύτης.

(β) Για την αναπαράσταση του προβλήματος στον Προτασιακό Λογισμό, θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο κάτω ατομικές προτάσεις:

$\Psi_A$ : ο A είναι ψεύτης

$\Psi_B$ : ο B είναι ψεύτης

Επομένως, η απάντηση του A μπορεί να διατυπωθεί ως:

$\Psi_B \rightarrow \Psi_A$

Από τη στιγμή όμως που δεν γνωρίζουμε κατά πόσο ο A είναι ψεύτης, μπορούμε να καταλήξουμε στο πιο κάτω το οποίο εκφράζει ότι αν ο A λέει την αλήθεια τότε η απάντησή του είναι αληθής ενώ αν είναι ψεύτης τότε η απάντησή του είναι ψευδής:

$[\neg \Psi_A \rightarrow (\Psi_B \rightarrow \Psi_A)] \wedge [\Psi_A \rightarrow \neg(\Psi_B \rightarrow \Psi_A)]$

Θα αποδείξουμε το πιο κάτω επακόλουθο το οποίο δηλώνει ότι με βάση την απάντηση του A κανένας από τους A και B δεν είναι ψεύτης.

$\neg \Psi_A \rightarrow (\Psi_B \rightarrow \Psi_A), \Psi_A \rightarrow \neg(\Psi_B \rightarrow \Psi_A) \vdash \neg \Psi_A \wedge \neg \Psi_B$

- |     |                                                       |                     |
|-----|-------------------------------------------------------|---------------------|
| 1.  | $\neg \Psi_A \rightarrow (\Psi_B \rightarrow \Psi_A)$ | προϋπόθεση          |
| 2.  | $\Psi_A \rightarrow \neg(\Psi_B \rightarrow \Psi_A)$  | προϋπόθεση          |
| 3.  | $\Psi_A$                                              | πρ. υπόθεση         |
| 4.  | $\neg(\Psi_B \rightarrow \Psi_A)$                     | MP 1, 4             |
| 5.  | $\Psi_B$                                              | πρ. υπόθεση         |
| 6.  | $\Psi_A$                                              | copy 3              |
| 7.  | $\Psi_B \rightarrow \Psi_A$                           | $\rightarrow$ i 5-6 |
| 8.  | $\perp$                                               | $\neg$ e 4, 7       |
| 9.  | $\neg \Psi_A$                                         | $\neg$ i 3-8        |
| 10. | $\Psi_B \rightarrow \Psi_A$                           | MP 1, 9             |
| 11. | $\Psi_B$                                              | πρ. υπόθεση         |
| 12. | $\Psi_A$                                              | MP 10, 11           |
| 13. | $\perp$                                               | $\neg$ e 9, 12      |
| 14. | $\neg \Psi_B$                                         | $\neg$ i 11-13      |
| 15. | $\neg \Psi_A \wedge \neg \Psi_B$                      | $\wedge$ 9, 14      |

(γ) Παρατηρούμε ότι αν ο D λέει την αλήθεια τότε ο E πρέπει να είναι ψεύτης. Επίσης θα πρέπει η απάντηση της C πράγματι να σημαίνει ότι μόνος ένας από τους τρεις λέει την αλήθεια. Αν η C λέει την αλήθεια τότε αυτή που λένε την αλήθεια είναι δύο, επομένως η απάντησή της είναι λανθασμένη. Ταυτόχρονα, αν είναι ψεύτης, τότε η απάντησή της είναι αληθής. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση. Συμπεραίνουμε ότι ο D είναι ψεύτης και ανθρωποφάγος ενώ ο E λέει την αλήθεια και δεν είναι ανθρωποφάγος. Επομένως μπορείτε να τον εμπιστευτείτε και να αναζητήσετε μαζί του καταφύγιο για τη νύχτα!

Θα αποδείξουμε το συμπέρασμα με τους αποδεικτικούς κανόνες του Προτασιακού Λογισμού χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω ατομικές προτάσεις:

$\Psi_C$ : ο C είναι ψεύτης

$\Psi_D$ : ο D είναι ψεύτης

$\Psi_E$ : ο E είναι ψεύτης

$A_D$ : ο D δεν είναι ανθρωποφάγος

$A_E$ : ο E είναι ανθρωποφάγος

Επομένως, η συζήτηση μπορεί να κωδικοποιηθεί ως:

C: Φι φομ

D: Φι φομ =  $(\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E)$

E:  $\Psi_D, \neg A_E$

D:  $\neg A_D$

Τα συμπεράσματα που εξάγουμε είναι τα εξής:

1. Αν οι C και D λένε αλήθεια, τότε:

$\neg \Psi_D \rightarrow [\neg \Psi_C \rightarrow ((\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E))]$

2. Αν οι C και D λένε ψέματα κι αλήθεια, αντίστοιχα τότε:

$\neg \Psi_D \rightarrow [\Psi_C \rightarrow \neg ((\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E))]$

3. Ο E μπορεί να λέει είτε αλήθεια είτε ψέματα, επομένως

$(\Psi_E \rightarrow \neg \Psi_D) \wedge (\neg \Psi_E \rightarrow \Psi_D)$  και  $(\Psi_E \rightarrow A_E) \wedge (\neg \Psi_E \rightarrow \neg A_E)$

Το λογικό επακόλουθο που θα αποδείξουμε είναι το

$\neg \Psi_D \rightarrow [\neg \Psi_C \rightarrow ((\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E))],$

$\neg \Psi_D \rightarrow [\Psi_C \rightarrow \neg ((\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E))],$

$(\Psi_E \rightarrow \neg \Psi_D) \wedge (\neg \Psi_E \rightarrow \Psi_D) \vdash \Psi_D \wedge \neg \Psi_E$

από το οποίο έπεται ότι, αφού  $\neg \Psi_E$  και  $\neg \Psi_E \rightarrow \neg A_E, \neg A_E$ .

|     |                                                                                                                                                                                   |                                                   |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1.  | $\neg \Psi_D \rightarrow [\neg \Psi_C \rightarrow [(\Psi_C \vee \Psi_D \vee \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \vee \neg \Psi_D \vee \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \vee \Psi_D \vee \Psi_E)]]$ | προϋπόθεση                                        |
| 2.  | $\neg \Psi_D \rightarrow [\Psi_C \rightarrow \neg [(\Psi_C \vee \Psi_D \vee \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \vee \neg \Psi_D \vee \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \vee \Psi_D \vee \Psi_E)]]$ | προϋπόθεση                                        |
| 3.  | $(\Psi_E \rightarrow \neg \Psi_D) \wedge (\neg \Psi_E \rightarrow \Psi_D)$                                                                                                        | προϋπόθεση                                        |
| 4.  | $\neg \Psi_E \rightarrow \Psi_D$                                                                                                                                                  | $\wedge e$ 2                                      |
| 5.  | $\neg \Psi_D$                                                                                                                                                                     | πρ. υπόθεση                                       |
| 6.  | $\neg \neg \Psi_E$                                                                                                                                                                | MT 4, 5                                           |
| 7.  | $\Psi_E$                                                                                                                                                                          | $\neg \neg e$ 6                                   |
| 8.  | $\neg \Psi_C \rightarrow [(\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E)]$               | MP 1, 5                                           |
| 9.  | $\neg \Psi_C$                                                                                                                                                                     | πρ. υπόθεση                                       |
| 10. | $(\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E)$                                         | MP 8, 9                                           |
| 11. | $\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E$ πρ. υπ.                                                                                                                                 | $\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E$ πρ. υπ. |
| 12. | $\Psi_C$ $\wedge e$ 11                                                                                                                                                            | $\Psi_C$ $\wedge e$ 11                            |
| 13. | $\perp$ $\neg e$ 9, 12                                                                                                                                                            | $\perp$ $\neg e$ 9, 12                            |
| 14. | $\perp$                                                                                                                                                                           | $\vee e$ 10,11-13                                 |
| 15. | $\Psi_C$                                                                                                                                                                          | RAA 9-14                                          |
| 16. | $\Psi_C \rightarrow \neg [(\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E)]$               | MP 2, 5                                           |
| 17. | $\neg [(\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E)]$                                  | MP 15, 16                                         |
| 18. | $\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E$                                                                                                                                         | $\wedge i$ 5, 7, 15                               |
| 19. | $(\Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \neg \Psi_E) \vee (\Psi_C \wedge \neg \Psi_D \wedge \Psi_E) \vee (\neg \Psi_C \wedge \Psi_D \wedge \Psi_E)$                                         | $\vee i$ 18                                       |
| 20. | $\perp$                                                                                                                                                                           | $\neg e$ 17, 19                                   |
| 21. | $\Psi_D$                                                                                                                                                                          | RAA 5-20                                          |
| 22. | $\Psi_E$                                                                                                                                                                          | πρ. υπόθεση                                       |
| 23. | $\Psi_E \rightarrow \neg \Psi_D$                                                                                                                                                  | $\wedge e$ 3                                      |
| 24. | $\neg \Psi_D$                                                                                                                                                                     | MP 22, 23                                         |
| 25. | $\perp$                                                                                                                                                                           | $\neg e$ 24, 21                                   |
| 26. | $\neg \Psi_E$                                                                                                                                                                     | $\neg e$ 22-25                                    |
| 27. | $\Psi_D \wedge \neg \Psi_E$                                                                                                                                                       | $\wedge i$ 21-26                                  |