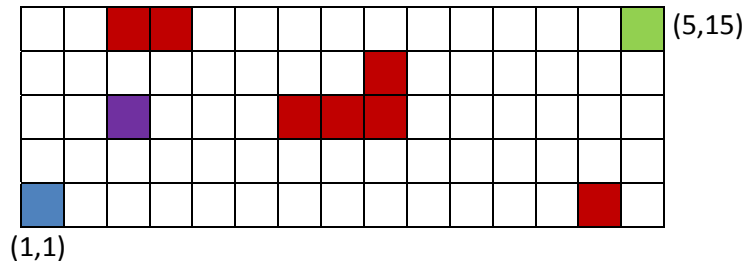


Σειρά Προβλημάτων 3Α – Λύσεις

Άσκηση 1

Θεωρήστε ένα ρομπότ που κινείται στον χώρο με στόχο τη μεταφορά αντικειμένων από το σημείο (1,1) στο σημείο (5,15) όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα.



Χρησιμοποιώντας τις ατομικές προτάσεις

- R_x : το ρομπότ βρίσκεται στη θέση x
 M : το ρομπότ κρατά κάποιο αντικείμενο
 A : στη θέση (1,1) υπάρχουν αντικείμενα προς μετακίνηση
 B_x : η θέση x περιέχει κάποιο εμπόδιο

να διατυπώσετε τις πιο κάτω ιδιότητες στη χρονική λογική LTL όπου αυτό είναι εφικτό.

- (i) Αν το ρομπότ κρατά κάποιο αντικείμενο θα μετακινηθεί στη θέση (5,15).
- (ii) Κάθε φορά που το ρομπότ κρατά κάποιο αντικείμενο και βρίσκεται στη θέση (5,15), τότε στην επόμενη κατάσταση θα αποθέσει το αντικείμενο στη θέση αυτή.
- (iii) Το ρομπότ θα περάσει από τη θέση (1,9) τουλάχιστον 2 φορές.
- (iv) Κάθε φορά που το ρομπότ δεν κρατά οποιοδήποτε αντικείμενο και στη θέση (1,1) δεν υπάρχουν άλλα αντικείμενα προς μετακίνηση, τότε θα παραμείνει στη θέση που βρίσκεται μέχρι να ξαναεμφανιστούν αντικείμενα στη θέση (1,1).
- (v) Αν η θέση (3,3) περιέχει εμπόδιο, το ρομπότ δεν θα βρεθεί ποτέ στις γειτονικές της θέσεις, δηλαδή στις θέσεις (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4).
- (vi) Το ρομπότ θα μετακινηθεί στη θέση (5,15) από τη θέση (1,1) αφού ενδιάμεσα περάσει από τις θέσεις (4,4) και (4,8) και χωρίς να περάσει καθόλου από τις θέσεις (2,2) και (2,5).
- (vii) Το ρομπότ μπορεί να βρεθεί στη θέση (1,1) μόνο αν στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση υπήρξε στη θέση (2,1).
- (viii) Είναι δυνατό το ρομπότ να επιστρέφει στη θέση (1,1) απείρως συχνά.

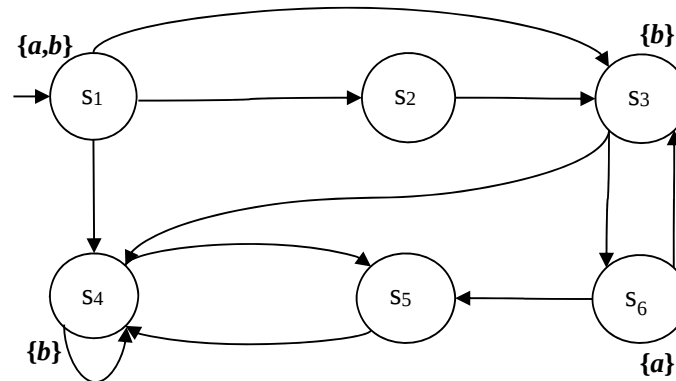
Λύση:

- (i) $M \rightarrow F R_{5,15}$
- (ii) $G [(M \wedge R_{5,15}) \rightarrow X (\neg M \wedge R_{5,15})]$

- (iii) $F [R_{1,9} \wedge (R_{1,9} \mathbf{U} (\neg R_{1,9} \wedge F R_{1,9}))]$
- (iv) $G \bigwedge_{1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 15} [(\neg M \wedge \neg A \wedge R_{i,j}) \rightarrow (R_{i,j} \mathbf{U} A)]$
- (v) $B_{3,3} \rightarrow G (\neg R_{2,2} \wedge \neg R_{2,3} \wedge \neg R_{2,4} \wedge \neg R_{3,2} \wedge \neg R_{3,4} \wedge \neg R_{4,2} \wedge \neg R_{4,3} \wedge \neg R_{4,4})$
- (vi) $R_{1,1} \wedge [(\neg R_{5,15} \wedge \neg R_{2,2} \wedge \neg R_{2,5}) \mathbf{U} R_{4,4}$
 $\wedge (\neg R_{5,15} \wedge \neg R_{2,2} \wedge \neg R_{2,5}) \mathbf{U} R_{4,8}$
 $\wedge (\neg R_{2,2} \wedge \neg R_{2,5}) \mathbf{U} R_{5,15}]$
- (vii) $G (\neg R_{2,1} \rightarrow X \neg R_{1,1})$ [ή, ισοδύναμα, $G (X R_{1,1} \rightarrow R_{2,1})]$
- (viii) Αυτή η ιδιότητα δεν μπορεί να διατυπωθεί στη χρονική λογική LTL αφού η γλώσσα αυτή δεν είναι σε θέση να εκφράσει *δυνατότητα*. (Η πρόταση $GF R_{1,1}$ εκφράζει ότι *απαραίτητα* το ρομπότ θα επιστρέφει στη θέση (1,1) απείρως συχνά.

Άσκηση 2

Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



Για κάθε μια από τις πιο κάτω ιδιότητες να αποφασίσετε (1) κατά πόσο υπάρχει μονοπάτι που να ικανοποιεί την ιδιότητα και, αν ναι, να επιδείξετε ένα τέτοιο μονοπάτι, και (2) κατά πόσο η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.

- (i) $FG b$
- (ii) $GF b$
- (iii) $GF a \rightarrow X (\neg a \wedge \neg b)$
- (iv) $X (\neg a \mathbf{U} b) \rightarrow X (\neg b \mathbf{U} a)$
- (v) $FG b \rightarrow FG \neg a$
- (vi) $G [(b \wedge \neg a) \rightarrow \neg F(a \wedge \neg b)] \vee FX a$

Λύση:

- (i) Η πρόταση ικανοποιείται στο μονοπάτι $s_1 s_4 s_4 s_4 \dots$

Εντούτοις η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού θα έπρεπε όλα τα μονοπάτια της δομής να ικανοποιούν την ιδιότητα και, για παράδειγμα, το μονοπάτι $s_1 s_2 s_3 s_6 s_3 s_6 \dots$ δεν την ικανοποιεί.

- (ii) Η πρόταση ικανοποιείται στο μονοπάτι $s_1s_2s_3s_6s_3s_6...$. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα αφού όλα τα μονοπάτια της δομής περνούν απείρως συχνά από καταστάσεις που ικανοποιούν την ατομική πρόταση b .
- (iii) Η πρόταση ικανοποιείται στο $s_1s_2s_3s_6s_3s_6...$
Εντούτοις η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού θα έπρεπε όλα τα μονοπάτια της δομής να ικανοποιούν την ιδιότητα και, για παράδειγμα, το μονοπάτι $s_1s_3s_6s_3s_6...$ δεν την ικανοποιεί αφού ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathbf{G F a}$ αλλά όχι την ιδιότητα $\mathbf{X} (\neg a \wedge \neg b)$.
- (iv) Κανένα μονοπάτι της δομής δεν ικανοποιεί την ιδιότητα. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι οι δυνατές επόμενες καταστάσεις είναι οι s_2, s_3, s_4 . Και οι τρεις αυτές καταστάσεις ικανοποιούν τη συνθήκη της συνεπαγωγής $\mathbf{X} (\neg a \cup b)$. Καμιά από αυτές όμως δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα $\mathbf{X} (\neg b \cup a)$. Επομένως η δομή παραβιάζει την ιδιότητα.
- (v) Η πρόταση ικανοποιείται στο μονοπάτι $s_1s_4s_4s_4...$ αφού τόσο η συνθήκη όσο και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι αληθή στο μονοπάτι.
Επίσης, παρατηρούμε ότι στα υπόλοιπα μονοπάτια της δομής η συνθήκη της συνεπαγωγής είναι ψευδής. Επομένως η ιδιότητα ικανοποιείται σε αυτά τετριμμένα. Συμπεραίνουμε ότι η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.
- (vi) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_3s_6s_3s_6...$ αφού στο μέλλον θα βρεθούμε στην κατάσταση s_3 η οποία ικανοποιεί το $\mathbf{X a}$.
Η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα: Καταρχάς παρατηρούμε ότι όλα τα μονοπάτια που επισκέπτονται την κατάσταση s_6 ικανοποιούν την ιδιότητα $\mathbf{F X a}$. Τα υπόλοιπα μονοπάτια σε κάθε κατάσταση που ικανοποιεί την ιδιότητα $b \wedge \neg a$ (κατάσταση s_4) ικανοποιείται και η ιδιότητα $\neg \mathbf{F(a} \wedge \neg b)$, αφού ούτως ή άλλως σε αυτά δεν υπάρχει μελλοντική κατάσταση που να ικανοποιεί το a . Συμπεραίνουμε ότι η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.