

Σειρά Προβλημάτων 2 – Λύσεις

Άσκηση 1

Για κάθε μια από τις πιο κάτω προτάσεις να αποφασίσετε αν είναι έγκυρη. Αν μια πρόταση είναι έγκυρη να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία του Τάρσκι, διαφορετικά να παρουσιάσετε μοντέλο στο οποίο η πρόταση να είναι ψευδής.

(α) $\exists x \neg \exists y P(x,y) \rightarrow \forall y \neg \forall x P(x,y)$

(β) $\forall y \neg \forall x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

(γ) $[\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z))] \rightarrow \exists x P(x,x)$

(δ) $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

(ε) $(\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Ποιες από τις προτάσεις είναι ικανοποιήσιμες; Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

Λύση:

(α) Η πρόταση είναι έγκυρη και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια ερμηνεία M με σύμπαν A ικανοποιείται η πρόταση $\exists x \neg \exists y P(x,y)$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και η πρόταση $\forall y \neg \forall x P(x,y)$.

Αφού $M \models \exists x \neg \exists y P(x,y)$, τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι

$$M \models \neg \exists y P(b,y) \text{ για κάποιο στοιχείο του σύμπαντος } b$$

Επομένως όχι $M \models \exists y P(b,y)$

$$\Leftrightarrow \text{όχι υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος } d \text{ τέτοιο ώστε } M \models P(b,d)$$

$$\Leftrightarrow \text{για κάθε στοιχείο του σύμπαντος } d \text{ ισχύει } M \models \neg P(b,d) \quad (1)$$

Ας θεωρήσουμε κάποιο στοιχείο a και ας υποθέσουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι

$$M \models \forall x P(x,a) \quad (2)$$

Τότε

$$M \models P(c,a) \quad \text{για κάθε στοιχείο του σύμπαντος } c$$

Αφού το (2) ισχύει για κάθε στοιχείο c του σύμπαντος ισχύει και για b , δηλαδή,

$$M \models P(b,a) \quad (3)$$

Από τα (1) και (3) καταλήγουμε σε αντίφαση. Επομένως η υπόθεσή μας (2) είναι λανθασμένη, δηλαδή $M \models \neg \forall x P(x,a)$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε τυχαίο στοιχείο a οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι

$$M \models \forall y \neg \forall x P(x,y)$$

και το ζητούμενο έπεται.

(β) Η πρόταση δεν είναι έγκυρη. Ως αντιπαράδειγμα θεωρούμε την ερμηνεία

$$\text{Σύμπαν } \Sigma = \{a,b,c\} \quad P = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση $\forall y \neg \forall x P(x,y)$, αλλά, δεν ισχύει η πρόταση $\exists x \forall y P(x,y)$.

Η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη αφού ικανοποιείται στην ερμηνεία:

$$\text{Σύμπαν } \Sigma = \{a,b,c\} \quad P = \{(b,a), (a,a), (c,a)\}$$

(γ) Η πρόταση είναι έγκυρη και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια ερμηνεία M με σύμπαν A ικανοποιείται η πρόταση $[\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z ((P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))]$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και η πρόταση $\exists x P(x,x)$.

Αφού $M \models \forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z ((P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$, τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι

$$M \models \forall x \exists y P(x,y) \text{ και} \quad (1)$$

$$M \models \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \text{ και} \quad (2)$$

$$M \models \forall x \forall y \forall z ((P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \quad (3)$$

Από (1) συμπεραίνουμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο του σύμπαντος

$$M \models \exists y P(\sigma, y) \text{ για κάθε στοιχείο του σύμπαντος } \sigma$$

Επομένως αν επιλέξουμε κάποιο στοιχείο, έστω a , ισχύει ότι

$$M \models \exists y P(a, y).$$

Επομένως, από την Αλήθεια του Τάρσκι, υπάρχει κάποιο στοιχείο του σύμπαντος, έστω b τέτοιο ώστε

$$M \models P(a, b) \quad (4)$$

Από το (2) συμπεραίνουμε ότι

$$M \models P(c, d) \rightarrow P(d, c) \quad \text{για κάθε } c, d \text{ στοιχεία του σύμπαντος}$$

και επομένως

$$M \models P(a, b) \rightarrow P(b, a) \quad (5)$$

Από (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι

$$M \models P(b, a) \quad (6)$$

Τέλος από το (3) σύμφωνα με την Αλήθεια του Τάρσκι

$$M \models (P(u, v) \wedge P(v, w)) \rightarrow P(u, w) \quad \text{για κάθε } u, v, w \text{ στοιχεία του σύμπαντος}$$

και επιλέγοντας $u = a, v = b, w = a$, παίρνουμε

$$M \models (P(a, b) \wedge P(b, a)) \rightarrow P(a, a) \quad (7)$$

Έτσι, από (4), (6) και (7),

$$M \models P(a, a)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $M \models \exists x P(x, x)$ και το ζητούμενο έπεται.

(δ) Η πρόταση δεν είναι έγκυρη. Ως αντιπαράδειγμα θεωρούμε την ερμηνεία

Σύμπαν $\Sigma = \{a, b\}$

$P = \{a\}$

$Q = \{\}$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ για $x = b$, αλλά δεν ισχύει η πρόταση $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ αφού αν και υπάρχει x για το οποίο $P(x)$, συγκεκριμένα το a , αλλά δεν υπάρχει x για το οποίο $Q(x)$.

Η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη, αφού στο πιο κάτω μοντέλο γίνεται αληθής.

Σύμπαν $\Sigma = \{a, b\}$

$P = \{a\}$

$Q = \{a\}$

(ε) Η πρόταση είναι έγκυρη και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια ερμηνεία M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$. Τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι

$$\text{είτε } M \models \neg \exists x P(x) \text{ είτε } M \models \exists x Q(x)$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\text{είτε για κάθε } a \in A, M \models \neg P(a) \quad (1)$$

$$\text{είτε υπάρχει } b \in A, M \models Q(b) \quad (2)$$

Ας υποθέσουμε επίσης, για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι $M \models \neg \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Επομένως όχι υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $M \models P(a) \rightarrow Q(a)$

Δηλαδή,

$$\text{όχι υπάρχει } a \in A \text{ τέτοιο ώστε } M \models \neg P(a) \text{ ή } M \models Q(a)$$

που είναι ισοδύναμο με

για κάθε $a \in A$,

$$M \models P(a) \quad (3)$$

$$\text{και } M \models \neg Q(a) \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε ότι ανάμεσα στα (1) και (2) ισχύει το (1), αυτό έρχεται σε αντίφαση με το (3). Παρόμοια, αν ισχύει το (2) τότε αυτό έρχεται σε αντίφαση με το (4). Επομένως, η υπόθεσή μας ότι $M \models \neg \exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ είναι εσφαλμένη και η πρόταση είναι έγκυρη.

Άσκηση 2 (34 μονάδες)

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα του κατηγορηματικού λογισμού.

Λύση:

(α) $\forall x \exists y P(x,y), \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x)), \forall x \forall y \forall z [(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)] \vdash \exists x P(x,x)$

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| 1. | $\forall x \exists y P(x,y)$ | προϋπόθεση |
| 2. | $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ | προϋπόθεση |
| 3. | $\forall x \forall y \forall z [(P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)]$ | προϋπόθεση |
| 4. | $\exists y P(a,y)$ | $\forall x \in 1$ |
| 5. | $b \quad P(a,b)$ | πρ. υπόθεση |
| 6. | $\forall y (P(a,y) \rightarrow P(y,a))$ | $\forall x \in 2$ |
| 7. | $P(a,b) \rightarrow P(b,a)$ | $\forall y \in 6$ |
| 8. | $P(b,a)$ | MP 7, 5 |
| 9. | $\forall y \forall z [(P(a,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(a,z)]$ | $\forall x \in 3$ |
| 10. | $\forall z [(P(a,b) \wedge P(b,z)) \rightarrow P(a,z)]$ | $\forall y \in 9$ |
| 11. | $(P(a,b) \wedge P(b,a)) \rightarrow P(a,a)$ | $\forall z \in 10$ |
| 12. | $P(a,b) \wedge P(b,a)$ | $\wedge i \ 5, 8$ |
| 13. | $P(a,a)$ | MP 11, 12 |
| 14. | $\exists x P(x,x)$ | $\exists x i \ 13$ |
| 15. | $\exists x P(x,x)$ | $\exists x \in 4, 5-14$ |

(β) $\exists x (\phi \rightarrow \psi) \vdash \forall x \phi \rightarrow \psi$, όπου το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ψ

1.	$\exists x (\phi \rightarrow \psi)$	προϋπόθεση
2.	$x_0 \phi[x_0/x] \rightarrow \psi$	πρ. υπόθεση *
3.	$\forall x \phi$	πρ. υπόθεση
4.	$\phi[x_0/x]$	$\forall x e 3$
5.	ψ	MP 2, 4
6.	$\forall x \phi \rightarrow \psi$	$\rightarrow i 3-6$
7.	$\forall x (\phi \rightarrow \psi)$	$\exists x e 2-6$

* $(\phi \rightarrow \psi)[x_0/x] = \phi[x_0/x] \rightarrow \psi[x_0/x] = \phi[x_0/x] \rightarrow \psi$, από την υπόθεση ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στη ψ

(γ) $\forall x \phi \rightarrow \psi \vdash \exists x (\phi \rightarrow \psi)$, όπου το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ψ

1.	$\forall x \phi \rightarrow \psi$	προϋπόθεση
2.	$\forall x \phi \vee \neg \forall x \phi$	LEM
3.	$\forall x \phi$	πρ. υπόθεση
4.	$\phi[x_0/x]$	πρ. υπόθεση
5.	ψ	MP 1, 3
6.	$\phi[x_0/x] \rightarrow \psi$	$\rightarrow i 4-5$
7.	$\exists x (\phi \rightarrow \psi)$	$\exists x i 6^*$
8.	$\neg \forall x \phi$	πρ. υπόθεση
9.	$\exists x \neg \phi$	**
10.	$x_0 \neg \phi[x_0/x]$	πρ. υπόθεση
11.	$\phi[x_0/x]$	πρ. υπόθεση
12.	$\perp$	$\neg e 10, 11$
13.	ψ	$\perp e 12$
14.	$\phi[x_0/x] \rightarrow \psi$	$\rightarrow i 11-13$
15.	$\exists x (\phi \rightarrow \psi)$	$\exists x i 14^*$
16.	$\exists x (\phi \rightarrow \psi)$	$\exists x e 9, 10-15$
17.	$\exists x (\phi \rightarrow \psi)$	$\vee e 2, 3-7, 8-16$

* $\phi[x_0/x] \rightarrow \psi = \phi[x_0/x] \rightarrow \psi[x_0/x] = (\phi \rightarrow \psi)[x_0/x]$, από την υπόθεση ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στη ψ

** Ισχύει από την απόδειξη της Διαφάνειας 2-27.

(δ) $\forall x \forall y ((f(x) = y) \rightarrow (g(y) = x)), \forall x \forall y ((g(x) = g(y)) \rightarrow x = y) \vdash \forall z (f(g(z)) = z)$

- | | | |
|-----|---|----------------------|
| 1. | $\forall x \forall y ((f(x) = y) \rightarrow (g(y) = x))$ | προϋπόθεση |
| 2. | $\forall x \forall y ((g(x) = g(y)) \rightarrow x = y)$ | προϋπόθεση |
| 3. | z_0 | |
| 4. | $f(g(z_0)) = f(g(z_0))$ | $= i$ |
| 5. | $\forall y ((f(g(z_0)) = y) \rightarrow (g(y) = g(z_0)))$ | $\forall x \in 1$ |
| 6. | $(f(g(z_0)) = f(g(z_0))) \rightarrow (g(f(g(z_0))) = g(z_0))$ | $\forall y \in 5$ |
| 7. | $g(f(g(z_0))) = g(z_0)$ | MP 6, 4 |
| 8. | $\forall y ((g(f(g(z_0))) = g(y)) \rightarrow (f(g(z_0)) = y))$ | $\forall x \in 2$ |
| 9. | $(g(f(g(z_0))) = g(z_0)) \rightarrow (f(g(z_0)) = z_0)$ | $\forall y \in 8$ |
| 10. | $f(g(z_0)) = z_0$ | MP 9, 7 |
| 11. | $\forall z (f(g(z)) = z)$ | $\forall z \in 3-10$ |

Άσκηση 3

(α) Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της SLD επίλυσης για να φθάσετε σε διάψευση του στόχου στο πιο κάτω πρόγραμμα λογικού προγραμματισμού. Να υποθέσετε ότι τα σύμβολα α, β, γ είναι σταθερές ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα (δηλαδή τα x, xs, y, ys, a, k) είναι μεταβλητές.

```
member(x, x:xs)
member(x, y:ys) ← member(x,ys)
nonmember(x, [])
nonmember(x, y:ys) ← nonmember(x,ys)

tomi_size(0, [], ys)
tomi_size(s(a),x:xs,ys) ← member(x,ys), tomi_size(a,xs,ys)
tomi_size(a,x:xs,ys) ← nonmember(x,ys), tomi_size(a,xs,ys)

← tomi_size(k,[α,β,γ],[γ,β])
```

Λύση:

Καταγράφουμε τα αξιώματα και το συμπέρασμα αριθμώντας τις γραμμές και εφαρμόζουμε τη Μέθοδο της Επίλυσης λαμβάνοντας τα πιο κάτω:

1. $\text{member}(x, x:xs)$
2. $\text{member}(x, y:ys) \leftarrow \text{member}(x, ys)$
3. $\text{nonmember}(x, [])$
4. $\text{nonmember}(x, y:ys) \leftarrow \text{nonmember}(x, ys)$
5. $\text{tomi_size}(0, [], ys)$
6. $\text{tomi_size}(s(a), x:xs, ys) \leftarrow \text{member}(x, ys), \text{tomi_size}(a, xs, ys)$
7. $\text{tomi_size}(a, x:xs, ys) \leftarrow \text{nonmember}(x, ys), \text{tomi_size}(a, xs, ys)$
8. $\leftarrow \text{tomi_size}(k, [\alpha, \beta, \gamma], [\gamma, \beta])$
9. $\leftarrow \text{nonmember}(\alpha, [\gamma, \beta]), \text{tomi_size}(k, [\beta, \gamma], [\gamma, \beta])$ από (7) και (8)
 $a \mapsto k, x \mapsto \alpha, xs \mapsto [\beta, \gamma], ys \mapsto [\gamma, \beta]$
10. $\leftarrow \text{nonmember}(\alpha, [\beta]), \text{tomi_size}(k, [\beta, \gamma], [\gamma, \beta])$ από (4) και (9)
 $x \mapsto \alpha, y \mapsto \gamma, ys \mapsto [\beta]$
11. $\leftarrow \text{nonmember}(\alpha, []), \text{tomi_size}(k, [\beta, \gamma], [\gamma, \beta])$ από (4) και (10)
 $x \mapsto \alpha, y \mapsto \beta, ys \mapsto []$
12. $\leftarrow \text{tomi_size}(k, [\beta, \gamma], [\gamma, \beta])$ από (3) και (11)
13. $\leftarrow \text{member}(\beta, [\gamma, \beta]), \text{tomi_size}(a, [\gamma], [\gamma, \beta])$ από (6) και (12)
 $k \mapsto s(a), x \mapsto \beta, xs \mapsto [\gamma], ys \mapsto [\gamma, \beta]$
14. $\leftarrow \text{member}(\beta, [\beta]), \text{tomi_size}(a, [\gamma], [\gamma, \beta])$ από (2) και (13)
 $x \mapsto \beta, y \mapsto \gamma, ys \mapsto [\beta]$
15. $\leftarrow \text{tomi_size}(a, [\gamma], [\gamma, \beta])$ από (1) και (14)
 $x \mapsto \beta, xs \mapsto []$
16. $\leftarrow \text{member}(\gamma, [\gamma, \beta]), \text{tomi_size}(a', [], [\gamma, \beta])$ από (6) και (15)
 $x \mapsto \gamma, xs \mapsto [], ys \mapsto [\gamma, \beta], a \mapsto s(a')^*$
17. $\leftarrow \text{tomi_size}(a', [], [\gamma, \beta])$ από (1) και (16)
18. $\perp$ $zs \mapsto [],$ από (5) και (17)
 $a' \mapsto 0$

* Χρησιμοποιήθηκε η παραλλαγή του κανόνα στη γραμμή 6:

$$\text{tomi_size}(s(a'), x:xs, ys) \leftarrow \text{member}(x, ys), \text{tomi_size}(a', xs, ys)$$

(β) Ποια αντικατάσταση ορθής απάντησης προέκυψε κατά την εκτέλεση του προγράμματος στο μέρος (α);

Αντικατάσταση ορθής απάντησης: $k \mapsto s(a) \mapsto s(s(a')) = s(s(0))$

Άσκηση 4

Να γράψετε τις πιο κάτω προτάσεις στον Κατηγορηματικό Λογισμό και να υπολογίσετε την προτασιακή μορφή τους. Να αποδείξετε την εγκυρότητα του συλλογισμού χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο της Επίλυσης.

Π1. Τα ρομπότ είναι μηχανές.

Π2. Κάθε μηχανή φτιάχνεται είτε από κάποιο άνθρωπο είτε από κάποιο ρομπότ.

Π3. Ο Brainy είναι ένα ρομπότ.

Π4. Ο Brainy δεν φτιάχτηκε από κάποια μηχανή.

Συμπέρασμα : Ο Brainy φτιάχτηκε από κάποιο άνθρωπο.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τα πιο κάτω κατηγορήματα και σταθερές.

Κατηγορήματα

Σταθερές

$P(x)$: το x είναι ρομπότ

B : Brainy

$M(x)$: το x είναι μηχανή

$A(x)$: το x είναι άνθρωπος

$\Phi(x,y)$: ο x έφτιαξε τον y

Ξεκινούμε μεταφράζοντας τις προτάσεις στον Κατηγορηματικό Λογισμό.

1. Τα ρομπότ είναι μηχανές.

$$\forall x (P(x) \rightarrow M(x))$$

2. Κάθε μηχανή φτιάχνεται είτε από κάποιο άνθρωπο είτε από κάποιο ρομπότ.

$$\forall u (M(u) \rightarrow \exists y (\Phi(y,u) \wedge (A(y) \vee P(y))))$$

3. Ο Brainy είναι ένα ρομπότ.

$$P(\text{Brainy})$$

4. Ο Brainy δεν φτιάχτηκε από κάποια μηχανή.

$$\neg \exists z (\Phi(z, \text{Brainy}) \wedge M(z))$$

Συμπέρασμα: Ο Brainy φτιάχτηκε από κάποιο άνθρωπο.

$$\exists w (\Phi(w, \text{Brainy}) \wedge A(w))$$

Συνεχίζουμε μετατρέποντας την άρνηση του συλλογισμού σε Κανονική Μορφή Prenex.
Θεωρούμε την άρνηση της πρότασης-συμπέρασμα.

$$\forall x (P(x) \rightarrow M(x))$$

$\wedge$

$$\forall u (M(u) \rightarrow \exists y (\Phi(y,u) \wedge (A(y) \vee P(y))))$$

$\wedge$

$$P(\text{Brainy})$$

$\wedge$

$$\neg \exists z (\Phi(z, \text{Brainy}) \wedge M(z))$$

$\wedge$

$$\neg \exists w (\Phi(w, \text{Brainy}) \wedge A(w))$$

$$\equiv \forall x (\neg P(x) \vee M(x)) \wedge \forall u (\neg M(u) \vee \exists y (\Phi(y,u) \wedge (A(y) \vee P(y)))) \wedge P(\text{Brainy})$$

$$\wedge \forall z (\neg \Phi(z, \text{Brainy}) \vee \neg M(z)) \wedge \forall w (\neg \Phi(w, \text{Brainy}) \vee \neg A(w))$$

$$\equiv \forall u \exists y \forall x \forall z \forall w [(\neg P(x) \vee M(x)) \wedge (\neg M(u) \vee (\Phi(y,u) \wedge (A(y) \vee P(y)))) \wedge P(\text{Brainy})$$

$$\wedge (\neg \Phi(z, \text{Brainy}) \vee \neg M(z)) \wedge (\neg \Phi(w, \text{Brainy}) \vee \neg A(w))]$$

$$\equiv \forall u \exists y \forall x \forall z \forall w [(\neg P(x) \vee M(x)) \wedge (\neg M(u) \vee \Phi(y,u)) \wedge (\neg M(u) \vee A(y) \vee P(y))]$$

$$\wedge P(\text{Brainy}) \wedge (\neg\Phi(z, \text{Brainy}) \vee \neg M(z)) \wedge (\neg\Phi(w, \text{Brainy}) \vee \neg A(w))]$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Skolem για απαλοιφή του υπαρξιακού ποσοδείκτη στην πρόταση και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \forall u \forall x \forall z \forall w [& (\neg P(x) \vee M(x)) \wedge (\neg M(u) \vee \Phi(f(u), u)) \\ & \wedge (\neg M(u) \vee A(f(u)) \vee P(f(u))) \wedge P(\text{Brainy}) \wedge (\neg\Phi(z, \text{Brainy}) \vee \neg M(z)) \\ & \wedge (\neg\Phi(w, \text{Brainy}) \vee \neg A(w))] \end{aligned}$$

και σε προτασιακή μορφή

$$\begin{aligned} & \{ \neg P(x), M(x) \}, \{ \neg M(u), \Phi(f(u), u) \}, \{ \neg M(u), A(f(u)), P(f(u)) \}, \\ & \{ P(\text{Brainy}) \}, \{ \neg\Phi(z, \text{Brainy}), \neg M(z) \}, \{ \neg\Phi(w, \text{Brainy}), \neg A(w) \} \end{aligned}$$

Εφαρμογή της μεθόδου της επίλυσης, μας οδηγεί σε διάψευση όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

