

## Σειρά Προβλημάτων 1 – Λύσεις

### Άσκηση 1

Ο πιο κάτω συλλογισμός (αποτελεί μικρή παραλλαγή συλλογισμού που) αποδίδεται στον Samuel Clarke και προέρχεται από την εργασία του “*Demonstration of the Being and Attributes of God*” (1703).

Π1. Κάτι υπάρχει.

Π2. Αν κάτι υπάρχει, τότε είτε υπήρχε από πάντοτε είτε τα πράγματα που υπάρχουν εμφανίστηκαν από το τίποτα.

Π3. Αν κάτι υπάρχει, τότε η ύπαρξή του οφείλεται είτε στη δική του φύση είτε στη θέληση κάποιας άλλης οντότητας.

Π4. Αν κάτι υπάρχει λόγω της δικής του φύσης, τότε υπάρχει από πάντοτε.

Π5. Αν κάτι υπάρχει από πάντοτε, τότε υπάρχει λόγω της δικής του φύσης.

Π6. Αν κάτι υπάρχει λόγω της θέλησης κάποιας άλλης οντότητας, τότε η υπόθεση ότι τα πράγματα που υπάρχουν εμφανίστηκαν από το τίποτα είναι λανθασμένη.

Συμπέρασμα. Κάτι υπάρχει από πάντοτε και η ύπαρξή του οφείλεται στη δική του φύση.

Αργότερα, ο George Boole στη δική του εργασία “*An Investigation of the Laws of Thought*” (1873) ανέλυσε αυτόν τον συλλογισμό χρησιμοποιώντας τις ατομικές προτάσεις

$x$  = Κάτι υπάρχει.

$y$  = Κάτι υπάρχει από πάντοτε.

$z$  = Τα πράγματα που υπάρχουν εμφανίστηκαν από το τίποτα.

$p$  = Κάτι υπάρχει λόγω της δικής του φύσης.

$q$  = Κάτι υπάρχει λόγω της θέλησης κάποιας άλλης Οντότητας.

και διατυπώνοντας τον συλλογισμό μέσω των πιο κάτω ιδιοτήτων.

Π1.  $x$

Π2.  $x \rightarrow ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))$

Π3.  $x \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$

Π4.  $p \rightarrow y$

Π5.  $y \rightarrow p$

Π6.  $q \rightarrow \neg z$

Συμπέρασμα.  $y \wedge p$

Να αποδείξετε τον πιο πάνω συλλογισμό χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο της Επίλυσης. Δηλαδή, να δείξετε ότι αν ισχύουν οι Π1-Π6, τότε ισχύει και το συμπέρασμα.

### Λύση:

Ξεκινούμε μετατρέποντας τις προτάσεις σε CNF. Θεωρούμε την άρνηση της πρότασης-συμπέρασμα.

1.  $x$

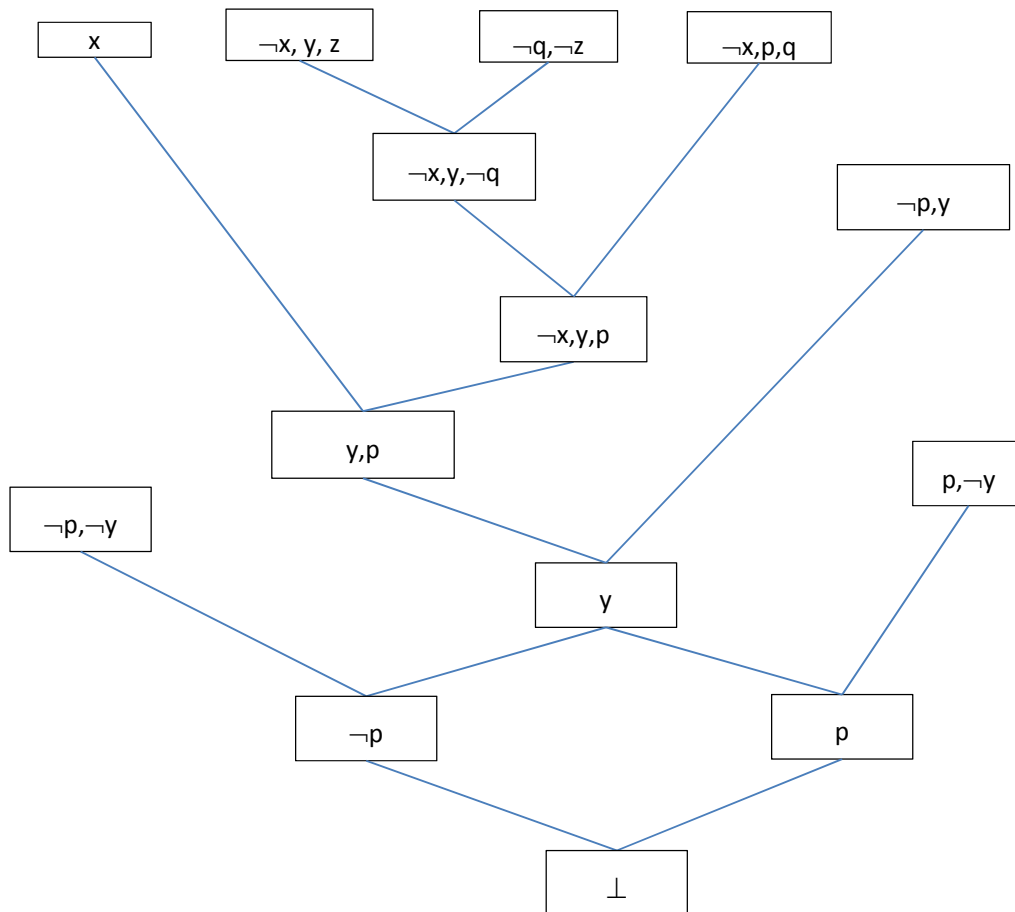
2.  $x \rightarrow ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z)) \equiv \neg x \vee ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))$   
 $\equiv \neg x \vee ((y \vee \neg y) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg z \vee \neg y) \wedge (\neg z \vee z))$

- $$\equiv (\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee \neg z \vee z)$$
3.  $x \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg x \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$   
 $\equiv \neg x \vee ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q))$   
 $\equiv (\neg x \vee p \vee \neg p) \wedge (\neg x \vee p \vee q) \wedge (\neg x \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg x \vee \neg q \vee q)$
4.  $p \rightarrow y \equiv \neg p \vee y$   
 5.  $y \rightarrow p \equiv \neg y \vee p$   
 6.  $q \rightarrow \neg z \equiv \neg q \vee \neg z$   
 7.  $\neg(y \wedge p) \equiv \neg y \vee \neg p$

Και σε προτασιακή μορφή:

$\{\{x\}, \{\neg x, y, \neg y\}, \{\neg x, y, z\}, \{\neg x, \neg z, \neg y\}, \{\neg x, \neg z, z\}, \{\neg x, p, \neg p\}, \{\neg x, p, q\}, \{\neg x, \neg q, \neg p\}, \{\neg x, \neg q, q\},$   
 $\{\neg p, y\}, \{\neg y, p\}, \{\neg q, \neg z\}, \{\neg y, \neg p\}\}$

Εφαρμογή της Μεθόδου της Επίλυσης μας οδηγεί σε διάψευση όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Επομένως, ο συλλογισμός είναι ικανοποιήσιμος.



## Άσκηση 2

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

- (α)  $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow p, s, \neg r \vdash \neg q$   
 (β)  $(p \vee q) \rightarrow (t \wedge u), r \rightarrow s \vdash ((p \vee q) \rightarrow s) \vee (r \rightarrow (t \wedge u))$   
 (γ)  $p \rightarrow q, \neg q \vee r \vee s, r \rightarrow x, \neg x \vee y, y \rightarrow \neg p, p \vdash s$

(δ)  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vdash (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

(ε)  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s) \vdash (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

Λύση:

(α)  $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow p, s, \neg r \vdash \neg q$

|     |                              |             |
|-----|------------------------------|-------------|
| 1.  | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | προϋπόθεση  |
| 2.  | $s \rightarrow p$            | προϋπόθεση  |
| 3.  | $s$                          | προϋπόθεση  |
| 4.  | $\neg r$                     | προϋπόθεση  |
| 5.  | $q$                          | πρ. υπόθεση |
| 6.  | $p$                          | MP 2, 3     |
| 7.  | $p \wedge q$                 | ∧i 6,5      |
| 8.  | $r$                          | MP 1, 7     |
| 9.  | $\perp$                      | ¬e 4, 8     |
| 10. | $\neg q$                     | ¬i 4-9      |

(β)  $(p \vee q) \rightarrow (t \wedge u), r \rightarrow s \vdash ((p \vee q) \rightarrow s) \vee (r \rightarrow (t \wedge u))$

|     |                                                                |                 |
|-----|----------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1.  | $(p \vee q) \rightarrow (t \wedge u)$                          | προϋπόθεση      |
| 2.  | $r \rightarrow s$                                              | προϋπόθεση      |
| 3.  | $s \vee \neg s$                                                | LEM             |
| 4.  | $s$                                                            | υπόθεση         |
| 5.  | $p \vee q$                                                     | υπόθεση         |
| 6.  | $s$                                                            | copy 4          |
| 7.  | $(p \vee q) \rightarrow s$                                     | →i 5-6          |
| 8.  | $((p \vee q) \rightarrow s) \vee (r \rightarrow (t \wedge u))$ | ∨ i 7           |
| 9.  | $\neg s$                                                       | υπόθεση         |
| 10. | $\neg r$                                                       | MT 2, 9         |
| 11. | $r$                                                            | υπόθεση         |
| 12. | $\perp$                                                        | ¬e 10, 11       |
| 13. | $t \wedge u$                                                   | ∧ e 12          |
| 14. | $r \rightarrow (t \wedge u)$                                   | →i 11-13        |
| 15. | $((p \vee q) \rightarrow s) \vee (r \rightarrow (t \wedge u))$ | ∨ i 14          |
| 16. | $((p \vee q) \rightarrow s) \vee (r \rightarrow (t \wedge u))$ | ∨e 3, 4-8, 9-15 |

(γ)  $p \rightarrow q, \neg q \vee r \vee s, r \rightarrow x, \neg x \vee y, y \rightarrow \neg p, p \vdash s$

1.  $p \rightarrow q$  προϋπόθεση
2.  $\neg q \vee r \vee s$  προϋπόθεση
3.  $r \rightarrow x$  προϋπόθεση
4.  $\neg x \vee y$  προϋπόθεση
5.  $y \rightarrow \neg p$  προϋπόθεση
6.  $p$  προϋπόθεση
7.  $q$  MP 1,6
8.  $\neg \neg p$   $\neg \neg i$  6
9.  $\neg y$  MT 5, 8

|              |         |          |               |
|--------------|---------|----------|---------------|
| 10. $\neg x$ | πρ. υπ. | $y$      | πρ. υπ.       |
| 11. $\perp$  |         | $\perp$  | $\neg e$ 9,10 |
| 12. $\neg x$ |         | $\neg x$ | $\perp e$ 11  |

13.  $\neg x$   $\vee e$  10-12

14.  $\neg r$  MT 3, 13

|                     |                    |         |                 |
|---------------------|--------------------|---------|-----------------|
| 15. $\neg q \vee r$ | πρ. υπ.            |         |                 |
| 16. $\neg q$        | πρ. υπ.            | $r$     | πρ. υπ.         |
| 17. $\perp$         | $\neg e$ 7, 16     | $\perp$ | $\neg e$ 14, 16 |
| 18. $s$             | $\perp e$ 17       | $s$     | $\perp e$ 17    |
| 19. $s$             | $\vee e$ 15, 16-18 |         |                 |
| 20. $s$             | $\vee e$ 2, 15-19  |         |                 |

|     |         |
|-----|---------|
| $s$ | πρ. υπ. |
|-----|---------|

(δ)  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vdash (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

1.  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$  προϋπόθεση
2.  $p \wedge q$  πρ. υπόθεση
3.  $p$   $\wedge e_1$  2
4.  $q$   $\wedge e_2$  2
5.  $p \vee r$   $\vee i_1$  3
6.  $p \vee s$   $\vee i_1$  3
7.  $q \vee r$   $\vee i_1$  4
8.  $q \vee s$   $\vee i_1$  4
9.  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$   $\wedge i$  5, 6, 7, 8

10.  $r \wedge s$  πρ. υπόθεση
11.  $r$   $\wedge e_1$  10
12.  $s$   $\wedge e_2$  10
13.  $p \vee r$   $\vee i_2$  11
14.  $p \vee s$   $\vee i_2$  11
15.  $q \vee r$   $\vee i_2$  12
16.  $q \vee s$   $\vee i_2$  12
17.  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$   $\wedge i$  5, 6, 7, 8
18.  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$   $\vee e$  2-9, 10-17

(ε)  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s) \vdash (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

1.  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$  προϋπόθεση
2.  $p \vee r$   $\wedge i$  1
3.  $p \vee s$   $\wedge i$  1
4.  $q \vee r$   $\wedge i$  1
5.  $q \vee s$   $\wedge i$  1
6.  $p \vee \neg p$  LEM

|     |                                  |                  |                                  |                   |
|-----|----------------------------------|------------------|----------------------------------|-------------------|
| 7.  | $p$                              | πρ. υπ.          | $\neg p$                         | πρ. υπ.           |
| 8.  | $q \vee \neg q$                  | LEM              | $p$                              | πρ. υπ.           |
| 9.  | $q$                              | πρ. υπ.          | $\perp$                          | $\neg e$ 7,8      |
| 10. | $p \wedge q$                     | $\wedge i$ 7,9   | $r$                              | $\perp e$ 9       |
| 11. | $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | $\vee i$ 10      | $r$                              | $\vee e$ 2, 8-10  |
| 12. |                                  |                  | $p$                              | πρ. υπ.           |
| 13. |                                  |                  | $\perp$                          | $\neg e$ 7,12     |
| 14. |                                  |                  | $s$                              | $\perp e$ 13      |
| 15. |                                  |                  | $s$                              | $\vee e$ 3, 12-14 |
| 16. |                                  |                  | $r \wedge s$                     | $\wedge i$ 11,15  |
| 17. |                                  |                  | $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | $\vee i$ 16       |
| 18. |                                  |                  |                                  |                   |
| 19. |                                  |                  |                                  |                   |
| 20. | $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | $\vee e$ 8 9-19  |                                  |                   |
| 21. | $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ | $\vee e$ 6, 7-20 |                                  |                   |

### Άσκηση 3

Υποθέστε λογισμό με τελεστές τους  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ , οι οποίοι τυγχάνουν ερμηνείας στο σύνολο των λογικών τιμών  $\{T, F, U\}$  σύμφωνα με τη σημασιολογία που παρουσιάζεται πιο κάτω.

| $P$ | $q$ | $\neg p$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|------------|--------------|-------------------|
| T   | T   | F        | T          | T            | T                 |
| T   | U   | F        | T          | U            | U                 |
| T   | F   | F        | T          | F            | F                 |
| U   | T   | U        | T          | U            | T                 |
| U   | U   | U        | U          | U            | U                 |
| U   | F   | U        | U          | F            | U                 |
| F   | T   | T        | T          | F            | T                 |
| F   | U   | T        | U          | F            | T                 |
| F   | F   | T        | F          | F            | T                 |

**(α) Να δείξετε ότι το σύνολο  $\{\neg, \wedge\}$  είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών.**

**Λύση:**

Για να δείξουμε ότι το σύνολο τελεστών  $\{\neg, \wedge\}$  είναι επαρκές αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές  $\vee$  και  $\rightarrow$  μπορούν να αντικατασταθούν μέσω ισοδύναμων προτάσεων που χρησιμοποιούν μόνο τελεστές από το σύνολο. Οι ζητούμενες ισοδυναμίες είναι οι

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Επαλήθευση των ισοδυναμιών μπορεί να γίνει μέσω πινάκων αλήθειας ως ακολούθως:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|----------|----------|------------------------|------------------------------|------------|
| T   | T   | F        | F        | F                      | T                            | T          |
| T   | U   | F        | U        | F                      | T                            | T          |
| T   | F   | F        | T        | F                      | T                            | T          |
| U   | T   | U        | F        | F                      | T                            | T          |
| U   | U   | U        | U        | U                      | U                            | U          |
| U   | F   | U        | T        | U                      | U                            | U          |
| F   | T   | T        | F        | F                      | T                            | T          |
| F   | U   | T        | U        | U                      | U                            | U          |
| F   | F   | T        | T        | T                      | F                            | F          |

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|
| T   | T   | F        | T               | T                 |
| T   | U   | F        | U               | U                 |
| T   | F   | F        | F               | F                 |
| U   | T   | U        | T               | T                 |
| U   | U   | U        | U               | U                 |
| U   | F   | U        | U               | U                 |
| F   | T   | T        | T               | T                 |
| F   | U   | T        | T               | T                 |
| F   | F   | T        | T               | T                 |

Παρατηρούμε ότι, και στους δύο πίνακες, οι δύο τελευταίες στήλες συμπίπτουν και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές ισοδυναμίες είναι αληθείς.

**(β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο  $\{\vee, \wedge\}$  δεν είναι επαρκές σύνολο τελεστών.**

**Λύση:**

Θα αποδείξουμε ότι είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε τον τελεστή  $\neg$  χρησιμοποιώντας τους τελεστές  $\wedge, \vee$ . Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε πρόταση  $\phi$  που περιέχει μια ατομική πρόταση  $p$  και τους τελεστές  $\wedge, \vee, \rightarrow$  είναι τέτοια ώστε αν  $[[p]] = T$  τότε  $[[\phi]] = T$ . Επομένως  $\phi \neq \neg p$ . Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της πρότασης  $\phi$ .

- Αν ο αριθμός των τελεστών της  $\phi$  είναι 0, τότε  $\phi = p$ . Επομένως, αν  $[[p]] = T$  τότε  $[[\phi]] = T$  και προφανώς  $\phi \neq \neg p$ .
- Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε πρόταση με λιγότερους από  $k$  τελεστές.
- Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση  $\phi$  έχει ακριβώς  $k$  τελεστές. Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις.
  - $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ . Ισχύει ότι οι προτάσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  έχουν λιγότερους από  $k$  τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για  $[[p]] = T$ ,  $[[\phi_1]] = T$  και  $[[\phi_2]] = T$ . Συνεπώς,  $[[\phi]] = T \vee T = T$  και  $\phi \neq \neg p$ .
  - $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ . Ισχύει ότι οι προτάσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  έχουν λιγότερους από  $k$  τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για  $[[p]] = T$ ,  $[[\phi_1]] = T$  και  $[[\phi_2]] = T$ . Συνεπώς,  $[[\phi]] = T \wedge T = T$  και  $\phi \neq \neg p$ .

Το ζητούμενο έπεται.

**Άσκηση 4**

**(α) Η Μέθοδος της Επίλυσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αποδεικτικό σύστημα το οποίο περιέχει ακριβώς έναν κανόνα:**

$$\frac{p_1 \vee \dots \vee p_m \vee \chi, \quad q_1 \vee \dots \vee q_n \vee \neg \chi}{p_1 \vee \dots \vee p_m \vee q_1 \vee \dots \vee q_n}$$

όπου τα  $p_1, \dots, p_m, \chi, q_1, \dots, q_n, \neg \chi$  αποτελούν στοιχεία (δηλαδή, ατομικές προτάσεις ή αρνήσεις ατομικών προτάσεων). Να αποδείξετε ότι ο κανόνας αυτός είναι ορθός.

**(β) Να χρησιμοποιήσετε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να αποφασίσετε αν ο πιο κάτω συλλογισμός είναι ορθός.**

**Υπόθεση 1:** Η Αλίκη δεν θα πάει στο πάρτι αν η Βίκυ πάει στο πάρτι.

**Υπόθεση 2:** Η Γιώτα θα πάει στο πάρτι μόνο αν πάει η Αλίκη και δεν πάει η Βίκυ.

**Συμπέρασμα:** Η Αλίκη δεν θα πάει στο πάρτι αν πάει η Βίκυ ή αν δεν έρθει η Γιώτα.

**(γ) Χρησιμοποιήστε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να αποφασίσετε αν ο συλλογισμός από το μέρος (β) είναι ορθός αντικαθιστώντας τη δεύτερη υπόθεση με την πιο κάτω:**

**Υπόθεση 2':** Η Γιώτα θα πάει στο πάρτι αν πάει η Αλίκη και δεν πάει η Βίκυ.

**Λύση:**

Ο κανόνας είναι ισοδύναμος με το πιο κάτω λογικό επακόλουθο, όπου γράφουμε  $p$  για την πρόταση  $p_1 \vee \dots \vee p_m$  και  $q$  για την πρόταση  $q_1 \vee \dots \vee q_n$ .

$$p \vee \chi, q \vee \neg \chi \vdash p \vee q$$

το οποίο μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

1.  $p \vee \chi$  προϋπόθεση

2.  $q \vee \neg \chi$  προϋπόθεση

|    |            |            |             |                 |
|----|------------|------------|-------------|-----------------|
| 3. | $p$        | πρ. υπ.    | $\chi$      | πρ. υπ.         |
| 4. | $p \vee q$ | $\vee i 3$ | $q$         | πρ. υπ.         |
| 5. |            |            | $p \vee q$  | $\vee i 3$      |
| 6. |            |            | $\neg \chi$ | πρ. υπ.         |
| 7. |            |            | $\perp$     | $\neg e 3, 4$   |
|    |            |            | $p \vee q$  | $\perp e 5$     |
|    |            |            | $p \vee q$  | $\vee e 2, 3-6$ |

8.  $p \vee q$   $\vee e 1, 3-7$

[Σημείωση: Εναλλακτικά, ο κανόνας θα μπορούσε να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας.]

(β) Για τη διατύπωση των προτάσεων στον Προτασιακό λογισμό θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο κάτω ατομικές προτάσεις.

A: Η Αλίκη θα πάει στο πάρτι

B: Η Βίκυ θα πάει στο πάρτι

Γ: Η Γιώτα θα πάει στο πάρτι

Οι προτάσεις της άσκησης μεταφράζονται στον Προτασιακό Λογισμό ως εξής:

Υπόθεση 1:  $B \rightarrow \neg A$

Υπόθεση 2:  $\Gamma \rightarrow (A \wedge \neg B)$

Και το συμπέρασμα είναι το

Συμπέρασμα:  $(B \vee \neg \Gamma) \rightarrow \neg A$

Συνεχίζουμε μετατρέποντας τις προτάσεις σε CNF. Θεωρούμε την άρνηση της πρότασης-συμπέρασμα.

$$B \rightarrow \neg A \equiv \neg B \vee \neg A$$

$$\Gamma \rightarrow (A \wedge \neg B) \equiv \neg \Gamma \vee (A \wedge \neg B) \equiv (\neg \Gamma \vee A) \wedge (\neg \Gamma \vee \neg B)$$

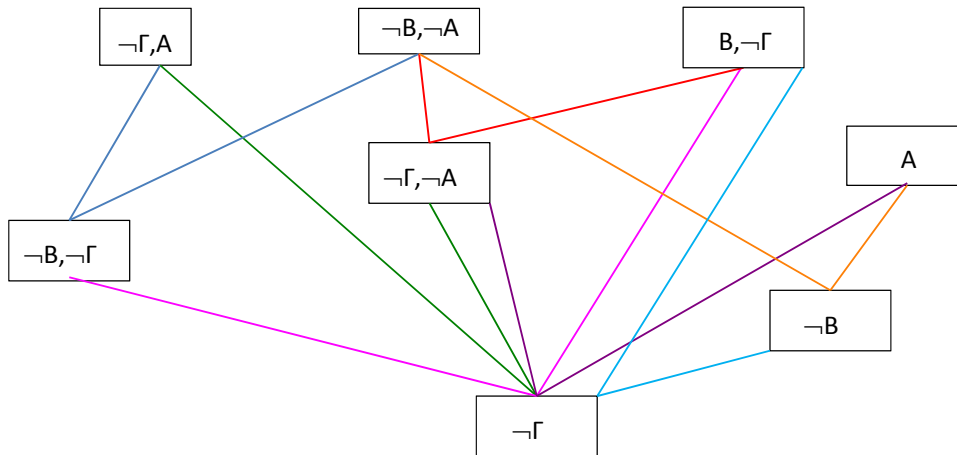
$$\neg((B \vee \neg \Gamma) \rightarrow \neg A) \equiv \neg(\neg(B \vee \neg \Gamma) \vee \neg A) = (B \vee \neg \Gamma) \wedge A$$

Και σε προτασιακή μορφή:

$$\{\{\neg B, \neg A\}, \{\neg \Gamma, A\}, \{\neg \Gamma, \neg B\}, \{B, \neg \Gamma\}, \{A\}\}$$

Εφαρμογή της Μεθόδου της Επίλυσης δημιουργεί τα πιο κάτω προτασιακά σύνολα. (Διαφορετικές εφαρμογές του βήματος της Επίλυσης εμφανίζονται με διαφορετικά χρώματα.)





Παρατηρούμε ότι είναι αδύνατο να ληφθούν με τη Μέθοδο της Επίλυσης άλλα προτασιακά σύνολα. Αφού η διαδικασία δεν μας έχει οδηγήσει σε διάψευση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πρόταση είναι ικανοποιήσιμη και ότι ο αρχικός συλλογισμός δεν είναι έγκυρος.

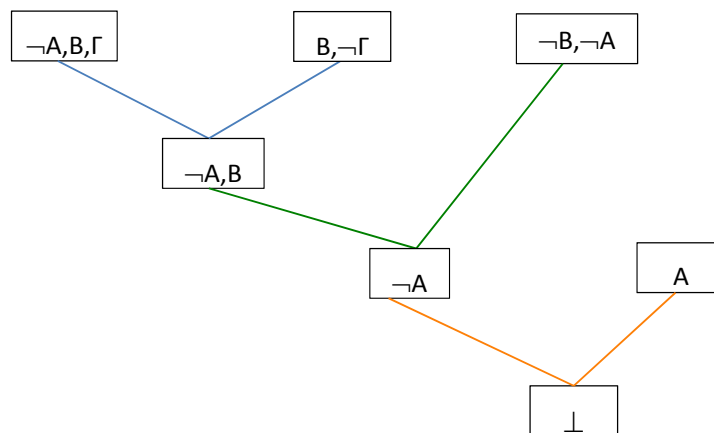
(γ) Η αναθεωρημένη μορφή της Υπόθεσης 2 έχει ως εξής:

$$(A \wedge \neg B) \rightarrow \Gamma \equiv \neg A \vee B \vee \Gamma$$

και η προτασιακή μορφή του συλλογισμού:

$$\{\{\neg B, \neg A\}, \{\neg A, B, \Gamma\}, \{B, \neg \Gamma\}, \{A\}\}$$

Εφαρμογή της Μεθόδου της Επίλυσης μας οδηγεί σε διάψευση όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Επομένως, ο συλλογισμός είναι ικανοποιήσιμος.



### Άσκηση 5A

Έστω  $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  ένα σύνολο από ατομικές προτάσεις και  $\phi$  πρόταση του Προτασιακού Λογισμού της οποίας οι ατομικές προτάσεις ανήκουν στο  $A$ . Επιπρόσθετα, θεωρήστε  $H = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  όπου για κάθε  $i$ , είτε  $\psi_i = p_i$  είτε  $\psi_i = \neg p_i$ . Να αποδείξετε με επαγωγή στη δομή της  $\phi$  ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα  $H \vdash \phi$  και  $H \vdash \neg \phi$ .

### Λύση:

Θα αποδείξουμε την πιο κάτω πρόταση:

$\Pi(k) \equiv$  'Για κάθε πρόταση  $\phi$  που περιέχει  $k$  τελεστές και  $H = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  όπου για κάθε  $i$ , είτε  $\psi_i = p_i$  είτε  $\psi_i = \neg p_i$  και  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  οι ατομικές προτάσεις της  $\phi$ , ισχύει ακριβώς ένα από τα  $H \models \phi$  και  $H \models \neg\phi$ .'

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

#### Βάση της Επαγωγής – $k = 0$

Σε αυτή την περίπτωση η  $\phi$  δεν περιέχει κανένα τελεστή και επομένως  $\phi = p_i$  για κάποιο  $i$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν  $p_i \in H$  τότε προφανώς  $H \models \phi$  αφού σε κάθε γραμμή που οι προϋποθέσεις  $H$  είναι αληθείς, αληθής είναι και η  $\phi = p_i$ .
2. Αν  $\neg p_i \in H$  τότε προφανώς  $H \models \neg\phi$  αφού σε κάθε γραμμή που οι προϋποθέσεις  $H$  είναι αληθείς, αληθής είναι και  $\neg p_i = \neg\phi$ .

Υπόθεση της Επαγωγής: Υποθέτουμε ότι ισχύει η  $\Pi(k)$  για κάθε  $k < m$ .

Βήμα της Επαγωγής: Θα αποδείξουμε την πρόταση  $\Pi(m)$ .

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση  $\phi$  έχει  $m$  τελεστές. Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις.

- $\phi = \neg\phi_1$ . Η πρόταση  $\phi_1$  περιέχει  $m-1$  τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής,  
 $H \models \phi_1$  ή  $H \models \neg\phi_1$

Αν  $H \models \phi_1$  τότε αφού η  $\phi$  αποτελεί την άρνηση της  $\phi_1$  ισχύει ότι  $H \models \neg\phi$ , διαφορετικά, αν  $H \models \neg\phi_1$  τότε συμπεραίνουμε ότι  $H \models \phi$ . Αυτό επιβεβαιώνει την ορθότητα της περίπτωσης.

- $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ . Ισχύει ότι οι προτάσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  έχουν λιγότερους από  $m$  τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής,  
 $H \models \phi_1$  ή  $H \models \neg\phi_1$   
 $H \models \phi_2$  ή  $H \models \neg\phi_2$

Αν τουλάχιστον ένα από τα  $H \models \phi_1$  και  $H \models \phi_2$  τότε  $H \models \phi$ , διαφορετικά  $H \models \neg\phi$ . Αυτό επιβεβαιώνει την ορθότητα της περίπτωσης.

- $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ . Ισχύει ότι οι προτάσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  έχουν λιγότερους από  $m$  τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής,  
 $H \models \phi_1$  ή  $H \models \neg\phi_1$   
 $H \models \phi_2$  ή  $H \models \neg\phi_2$

Αν  $H \models \phi_1$  και  $H \models \phi_2$  τότε  $H \models \phi$ , διαφορετικά  $H \models \neg\phi$ . Αυτό επιβεβαιώνει την ορθότητα της περίπτωσης.

- $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ . Ισχύει ότι οι προτάσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  έχουν λιγότερους από  $m$  τελεστές, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής,  
 $H \models \phi_1$  ή  $H \models \neg\phi_1$   
 $H \models \phi_2$  ή  $H \models \neg\phi_2$

Αν όχι  $H \models \phi_1$  και  $H \models \phi_2$  τότε  $H \models \phi$ , διαφορετικά  $H \models \neg\phi$ . Αυτό επιβεβαιώνει την ορθότητα της περίπτωσης.

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη και το ζητούμενο έπεται.