

## Σειρά Προβλημάτων 5

### Ημερομηνία Παράδοσης: 4/12/19

#### Άσκηση 1 [20 μονάδες] (Τελική Εξέταση 2012)

Να αποφασίσετε κατά πόσο τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα είναι ορθά. Αν ένα επακόλουθο είναι ορθό να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας το σχετικό σύστημα κανόνων, διαφορετικά να δώσετε ερμηνεία στην οποία το επακόλουθο να είναι ψευδές.

(α)  $\vdash (p \rightarrow (q \vee r)) \rightarrow (\neg q \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p))$

(β)  $\forall x [P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))], \neg \exists x [\neg R(x) \wedge Q(x)] \vdash \forall x [(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$

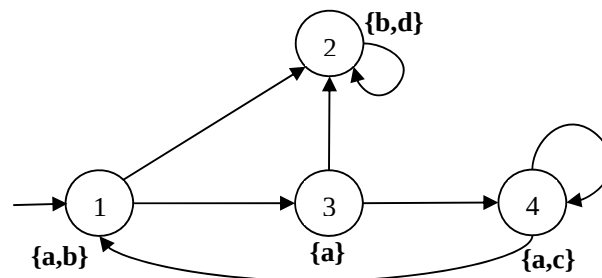
(γ)  $\forall x \forall y [P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)], \neg P(a,b) \vdash P(b,a)$

#### Άσκηση 2 [24 μονάδες] (Τελική Εξέταση 2011)

(α) Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις στον χρονικό λογισμό CTL.

- (i) Την επόμενη φορά που θα ισχύει το  $p$  θα ισχύει ταυτόχρονα και το  $q$ .
- (ii) Μετά το  $p$ , αν αυτό εμφανιστεί, το  $q$  δεν εμφανίζεται ποτέ ξανά.
- (iii) Ανάμεσα σε οποιεσδήποτε δύο εμφανίσεις του  $p$  θα εμφανιστεί το  $q$ .
- (iv) Το  $p$  θα εμφανιστεί ακριβώς μια φορά.

(β) Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL για να ελέγξετε κατά πόσο η κατάσταση 1 της δομής ικανοποιεί την ιδιότητα που ακολουθεί.

$$AG A(a \ U \ b) \rightarrow EG EX A(a \ U \ d)$$

(γ) Για κάθε ένα από τα πιο κάτω ζεύγη ιδιοτήτων να ελέγξετε κατά πόσο οι ιδιότητες που περιέχει είναι ισοδύναμες δίνοντας είτε απόδειξη της ισοδυναμίας είτε κάποιο αντιπαράδειγμα.

(i)  $(F G p) \vee (F G q)$                       και                       $F (G p \vee G q)$

(ii)  $G p \wedge F q$                                       και                                       $(G p) \wedge (p \ U \ q)$

#### Άσκηση 3 [20 μονάδες] (Τελική Εξέταση 2012)

(α) Να αποδείξετε την ορθότητα της προδιαγραφής  $\models_{\text{par}} \{\text{true}\} P \{v = x - y\}$  όπου ο κώδικας του  $P$  δίνεται πιο κάτω.

```
v := 0;  
z := 0;  
while (z != y){  
    z := z+1;  
    v := v-1;  
}  
v := v+x;
```

(β) Να εξηγήσετε γιατί η προδιαγραφή από το μέρος (α) δεν είναι ολικά ορθή επιδεικνύοντας συνθήκες κάτω από τις οποίες το πρόγραμμα P δεν τερματίζει.

(γ) Να εντοπίσετε προσυνθήκη A για την οποία το πρόγραμμα τερματίζει και να αποδείξετε ότι η προσυνθήκη αυτή πράγματι εγγυάται τον ορθό τερματισμό του προγράμματος, δηλαδή, να αποδείξετε την προδιαγραφή  $\models_{\text{tot}} \{A\} P \{v = x - y\}$ .

#### Άσκηση 4 [14 μονάδες]

Έστω πλαίσιο  $F = (W, R)$ . Να αποδείξετε τα πιο κάτω:

(α) Αν η σχέση R είναι συμμετρική, τότε  $F \models \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ .

(β) Αν η σχέση R είναι μεταβατική, τότε  $F \models \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ .

#### Άσκηση 5 [22 μονάδες]

Στο τελευταίο σας ταξίδι στο διάστημα έχετε καταφθάσει στον πλανήτη Illogis. Σύμφωνα με τον ταξιδιωτικό σας οδηγό, στον πλανήτη αυτό υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη ευφύων πλασμάτων: αυτά που λένε πάντα την αλήθεια και αυτά που πάντα ψεύδονται. Είναι αδύνατον να διαχωρίσει κάποιος ανάμεσα στα δύο είδη από την εμφάνισή τους.

(α) Στην πρώτη σας συνάντηση με δύο κατοίκους, τους P και Q, τους ρωτάτε: «Είναι κάποιος από εσάς ψεύτης;». «Τουλάχιστον ένας από εμάς είναι ψεύτης», απαντά ο P. Μπορείτε να γνωρίζετε τι είναι ο P και τι ο Q; Να διατυπώσετε το πρόβλημα στον Προτασιακό Λογισμό και να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας.

(β) Συνεχίζοντας την περιδιάβασή σας, συναντάτε άλλους δύο κατοίκους A και B και ρωτάτε τον A: «Κάποιος από τους δυο σας που λέει πάντα την αλήθεια;» «Αν ο B είναι ψεύτης, τότε είμαι ψεύτης», απαντά ο A. Τι είναι οι A και B; Να διατυπώσετε το πρόβλημα στον Προτασιακό Λογισμό και να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τους αποδεικτικούς κανόνες του Προτασιακού Λογισμού.

(γ) Το βράδυ αρχίζετε να ψάχνετε για καταφύγιο για τη νύχτα, αλλά είστε πολύ επιφυλακτικοί καθώς γνωρίζετε ότι ορισμένοι από τους κατοίκους είναι ανθρωποφάγοι. Συναντιέστε με τρεις κατοίκους, C, D, και E και ακολουθεί η πιο κάτω συνομιλία.

Εσείς ρωτάτε τη C: *Πόσοι από εσάς τους τρεις λέτε την αλήθεια;*

C (στη γλώσσα της): *Φι φομ.*

Εσείς ρωτάτε τον D: *Τι είπε;*

D: *Είπε ότι μόνο ένας από εμάς λέει την αλήθεια.*

E: *Μην εμπιστεύεστε τον D, είναι ψεύτης. Ελάτε μαζί μου, δεν είμαι ανθρωποφάγος.*

D: *Όχι, ελάτε μαζί μου, δεν είμαι ανθρωποφάγος.*

Τι πρέπει να κάνετε; Να διατυπώσετε το πρόβλημα στον Προτασιακό Λογισμό και να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας μέθοδο της επιλογής σας.