

Σειρά Προβλημάτων 1

Ημερομηνία Παράδοσης: 27/09/19

Άσκηση 1 (15 μονάδες)

Ο πιο κάτω συλλογισμός (αποτελεί μικρή παραλλαγή συλλογισμού που) αποδίδεται στον Samuel Clarke και προέρχεται από την εργασία του “*Demonstration of the Being and Attributes of God*” (1703).

Π1. Κάτι υπάρχει.

Π2. Αν κάτι υπάρχει, τότε είτε υπήρχε από πάντοτε είτε τα πράγματα που υπάρχουν εμφανίστηκαν από το τίποτα.

Π3. Αν κάτι υπάρχει, τότε η ύπαρξή του οφείλεται είτε στη δική του φύση είτε στη θέληση κάποιας άλλης οντότητας.

Π4. Αν κάτι υπάρχει λόγω της δικής του φύσης, τότε υπάρχει από πάντοτε.

Π5. Αν κάτι υπάρχει από πάντοτε, τότε υπάρχει λόγω της δικής του φύσης.

Π6. Αν κάτι υπάρχει λόγω της θέλησης κάποιας άλλης οντότητας, τότε η υπόθεση ότι τα πράγματα που υπάρχουν εμφανίστηκαν από το τίποτα είναι λανθασμένη.

Συμπέρασμα. Κάτι υπάρχει από πάντοτε και η ύπαρξή του οφείλεται στη δική του φύση.

Αργότερα, ο George Boole στη δική του εργασία “*An Investigation of the Laws of Thought*” (1873) ανέλυσε αυτόν τον συλλογισμό χρησιμοποιώντας τις ατομικές προτάσεις

x = Κάτι υπάρχει.

y = Κάτι υπάρχει από πάντοτε.

z = Τα πράγματα που υπάρχουν εμφανίστηκαν από το τίποτα.

p = Κάτι υπάρχει λόγω της δικής του φύσης.

q = Κάτι υπάρχει λόγω της θέλησης κάποιας άλλης Οντότητας.

και διατυπώνοντας τον συλλογισμό μέσω των πιο κάτω ιδιοτήτων.

Π1. x

Π2. $x \rightarrow ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))$

Π3. $x \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$

Π4. $p \rightarrow y$

Π5. $y \rightarrow p$

Π6. $q \rightarrow \neg z$

Συμπέρασμα. $y \wedge p$

Να αποδείξετε τον πιο πάνω συλλογισμό χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο της Επίλυσης. Δηλαδή, να δείξετε ότι αν ισχύουν οι Π1-Π6, τότε ισχύει και το συμπέρασμα.

Άσκηση 2 (35 μονάδες)

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

(α) $(p \wedge q) \rightarrow r, s \rightarrow p, s, \neg r \vdash \neg q$

(β) $(p \vee q) \rightarrow (t \wedge u), r \rightarrow s \vdash ((p \vee q) \rightarrow s) \vee (r \rightarrow (t \wedge u))$

- (γ) $p \rightarrow q, \neg q \vee r \vee s, r \rightarrow x, \neg x \vee y, y \rightarrow \neg p, p \vdash s$
 (δ) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \vdash (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$
 (ε) $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s) \vdash (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

Υποθέστε λογισμό με τελεστές τους $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, οι οποίοι τυγχάνουν ερμηνείας στο σύνολο των λογικών τιμών $\{T, F, U\}$ σύμφωνα με τη σημασιολογία που παρουσιάζεται πιο κάτω.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T	T
T	U	F	T	U	U
T	F	F	T	F	F
U	T	U	T	U	T
U	U	U	U	U	U
U	F	U	U	F	U
F	T	T	T	F	T
F	U	T	U	F	T
F	F	T	F	F	T

(α) Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\neg, \wedge\}$ είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών.

(β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\vee, \wedge\}$ δεν είναι επαρκές σύνολο τελεστών.

[Σημείωση: Ο πιο πάνω λογισμός ονομάζεται *λογισμός τριών τιμών* (3-valued logic). Στον λογισμό αυτό κάθε ατομική πρόταση μπορεί να πάρει μια από τις τιμές True (T), False (F), ή Unknown (U).]

Άσκηση 4 (15 μονάδες)

(α) Η Μέθοδος της Επίλυσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αποδεικτικό σύστημα το οποίο περιέχει ακριβώς έναν κανόνα:

$$\frac{p_1 \vee \dots \vee p_m \vee \chi, \quad q_1 \vee \dots \vee q_n \vee \neg \chi}{p_1 \vee \dots \vee p_m \vee q_1 \vee \dots \vee q_n}$$

όπου τα $p_1, \dots, p_m, \chi, q, \dots, q_n, \neg \chi$ αποτελούν στοιχεία (δηλαδή, ατομικές προτάσεις ή αρνήσεις ατομικών προτάσεων). Να αποδείξετε ότι ο κανόνας αυτός είναι ορθός.

(β) Να χρησιμοποιήσετε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να αποφασίσετε αν ο πιο κάτω συλλογισμός είναι ορθός.

Υπόθεση 1: Η Αλίκη δεν θα πάει στο πάρτι αν η Βίκυ πάει στο πάρτι.

Υπόθεση 2: Η Γιώτα θα πάει στο πάρτι μόνο αν πάει η Αλίκη και δεν πάει η Βίκυ.

Συμπέρασμα: Η Αλίκη δεν θα πάει στο πάρτι αν πάει η Βίκυ ή αν δεν έρθει η Γιώτα.

(γ) Χρησιμοποιήστε τη Μέθοδο της Επίλυσης για να αποφασίσετε αν ο συλλογισμός από το μέρος (β) είναι ορθός αντικαθιστώντας τη δεύτερη υπόθεση με την πιο κάτω:

Υπόθεση 2': Η Γιώτα θα πάει στο πάρτι αν πάει η Αλίκη και δεν πάει η Βίκυ.

Επιλέξτε και λύστε **μία** από τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Άσκηση 5A (20 μονάδες)

Έστω $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ένα σύνολο από ατομικές προτάσεις και ϕ πρόταση του Προτασιακού Λογισμού της οποίας οι ατομικές προτάσεις ανήκουν στο A . Επιπρόσθετα, θεωρήστε $H = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ όπου για κάθε i , είτε $\psi_i = p_i$ είτε $\psi_i = \neg p_i$. Να αποδείξετε με επαγωγή στη δομή της ϕ ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα $H \models \phi$ και $H \models \neg\phi$.

Άσκηση 5B (20 μονάδες)

Να υλοποιήσετε πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, το οποίο να παίρνει ως δεδομένο εισόδου μια πρόταση σε CNF και να αποφασίζει κατά πόσο η πρόταση είναι έγκυρη ή όχι. Ποιος ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματός σας;