Σειρά Προβλημάτων 3 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να θεωρήσετε τις προτάσεις (1) – (6) που ακολουθούν και να αποφασίσετε κατά πόσο Θεωρήστε μια μηχανή πώλησης καφέ η οποία εξυπηρετεί ένα σύνολο από φοιτητές και καθηγητές. Χρησιμοποιώντας τις ατομικές προτάσεις

empty: το απόθεμα του καφέ έχει εξαντληθεί

recharge: η μηχανή γεμίζει με καφέ

make.drink: η μηχανή παρασκευάζει ένα ποτό (καφέ)

s_at.machine: κάποιος φοιτητής βρίσκεται στη μηχανή

p_at.machine: κάποιος καθηγητής βρίσκεται στη μηχανή

s_forget: κάποιος φοιτητής ξεχνά τον καφέ του στη μηχανή

p_forget: κάποιος καθηγητής ξεχνά τον καφέ του στη μηχανή

να διατυπώσετε τις πιο κάτω ιδιότητες στη χρονική λογική LTL όπου αυτό είναι εφικτό.

- **(i) Το απόθεμα του καφέ αναπόφευκτα κάποτε θα εξαντληθεί.**
- **(ii) Αν το απόθεμα του καφέ εξαντληθεί θα ξαναγεμίσει μέσα σε δύο μονάδες χρόνου (δύο βήματα).**
- **(iii) Ένας φοιτητής δεν ξεχνά ποτέ τον καφέ του στη μηχανή.**
- **(iv) Είναι δυνατό κάποιος καθηγητής να ξεχάσει τον καφέ του στη μηχανή.**
- **(v) Από τη στιγμή που κάποιος καθηγητής φτάσει στη μηχανή δεν θα εμφανιστεί κανένας φοιτητής μέχρις ότου ο καθηγητής να μην βρίσκεται πια στη μηχανή.**
- **(vi) Δεν είναι δυνατόν από τη στιγμή που η μηχανή γεμίσει με καφέ το απόθεμα του καφέ να εξαντληθεί πριν παραχθούν τουλάχιστον δύο ποτά.**
- **(vii) Η μηχανή θα παρασκευάσει ένα ποτό μόνο εάν προηγουμένως βρεθεί στη μηχανή κάποιος φοιτητής ή κάποιος καθηγητής.**

Λύση:

(i) $\mathbf{F}\ \text{empty}$

(ii) $\mathbf{G}\ (\text{empty} \rightarrow \mathbf{XX}\ \text{recharge})$

(iii) $\neg\, \mathbf{F}\ \text{s\_forget}$

(iv) Αυτή η ιδιότητα δεν μπορεί να διατυπωθεί στη χρονική λογική LTL

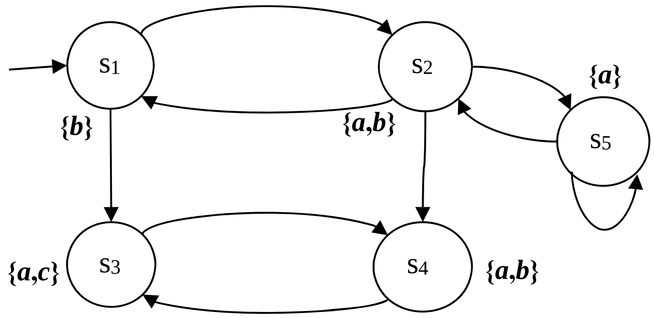
(v) $\mathbf{G}\ (\text{p\_at.machine} \rightarrow (\neg \text{s\_at.machine}\ \mathbf{U}\ \neg(\text{p\_at.machine})))$

(vi) $\mathbf{G}\ [\ \text{recharge} \rightarrow (\neg \text{empty}\ \mathbf{U}\ (\text{make.drink}$
$\wedge ((\text{make.drink} \wedge \neg \text{empty})\ \mathbf{U}\ (\neg \text{make.drink} \wedge \neg \text{empty}$
$\wedge\ ((\neg\, \text{make.drink} \wedge \neg \text{empty})\ \mathbf{U}\ \text{make.drink})\ )\ )\ )\ )\ ]$

(vii) $\neg \text{make.drink} \wedge \mathbf{G}\ [\ (\neg \text{make.drink} \wedge \mathbf{F}\ \text{make.drink})$
$\rightarrow (\neg \text{make.drink}\ \mathbf{U}\ (\text{s.at\_machine} \vee \text{p.at\_machine}))]$

Άσκηση 2

Θεωρήστε την ακόλουθη δομή Kripke.



Για κάθε μια από τις πιο κάτω ιδιότητες να αποφασίσετε (1) κατά πόσο υπάρχει μονοπάτι που να ικανοποιεί την ιδιότητα και, αν ναι, να επιδείξετε ένα τέτοιο μονοπάτι, και (2) κατά πόσο η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.

(i) $F\ G\ a$

(ii) $G\ F\ a$

(iii) $F\ G\ \neg b \rightarrow X\ F\ c$

(iv) $X\ (a \wedge \neg b) \rightarrow G\ (a\ U\ c)$

(v) $G\ F\ b \rightarrow F\ G\ a$

(vi) $G\ [(b \wedge c) \rightarrow \neg F(a \wedge \neg b)] \vee F(a \wedge \neg b)$

Λύση:

(i) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_5s_5s_5$… Εντούτοις η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού θα έπρεπε όλα τα μονοπάτια της δομής να ικανοποιούν την ιδιότητα και, για παράδειγμα, το μονοπάτι $s_1s_2s_1s_2s_1s_2$... δεν την ικανοποιεί.

(ii) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_5s_5s_5$… Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα αφού όλα τα μονοπάτια της δομής περνούν απείρως συχνά από καταστάσεις που ικανοποιούν την ατομική πρόταση *a*.

(iii) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_1s_1$… αφού η συνθήκη της συνεπαγωγής είναι ψευδής στο μονοπάτι. Εντούτοις η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού θα έπρεπε όλα τα μονοπάτια της δομής να ικανοποιούν την ιδιότητα και, για παράδειγμα, το μονοπάτι $s_1s_2s_5s_5s_5$... δεν την ικανοποιεί.

(iv) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_1s_1$… αφού η συνθήκη της συνεπαγωγής γίνεται ψευδής στο μονοπάτι. Εντούτοις, παρατηρούμε ότι η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού, ενώ στο μονοπάτι $s_1s_3s_4s_3s_4$ ικανοποιείται η πρόταση $X(a \wedge \neg b)$, δεν ικανοποιείται και η ιδιότητα $G\ (a\ U\ c)$.

(v) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_5s_5s_5$… αφού η συνθήκη της συνεπαγωγής είναι ψευδής. Εντούτοις η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού θα έπρεπε όλα τα μονοπάτια της δομής να ικανοποιούν την ιδιότητα και το μονοπάτι $s_1s_2s_1s_2s_1s_2$... δεν την ικανοποιεί.

(vi) Η πρόταση ικανοποιείται από το μονοπάτι $s_1s_2s_5s_5s_5$… αφού ικανοποιείται η ιδιότητα $F(a \wedge \neg b)$. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα αφού, σε κάθε μονοπάτι ικανοποιείται και η ιδιότητα $G\ [(b \wedge c) \rightarrow \neg F(a \wedge \neg b)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει καμιά κατάσταση που να ικανοποιεί το $b \wedge c$.

Άσκηση 3

Να ελέγξετε ποιες από τις πιο κάτω ιδιότητες αποτελούν ταυτολογίες χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία της LTL δίνοντας είτε απόδειξη της συνεπαγωγής είτε κάποιο αντιπαράδειγμα δομής Kripke στην οποία να μην ικανοποιείται η ιδιότητα.

i. $(\mathbf{G}\,\phi \to \mathbf{F}\,\psi) \to [\phi\ \mathbf{U}\ (\psi \vee \neg\phi)]$

ii. $(\mathbf{GF}\,\phi \to \mathbf{GF}\,\psi) \to \mathbf{G}\,(\phi \to \mathbf{F}\,\psi)$

iii. $\mathbf{GG}(\phi \vee \neg\psi) \to \neg\mathbf{F}\,(\neg\phi \wedge \psi)$

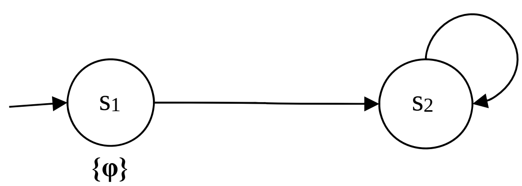
iv. $(\mathbf{GF}\,\phi \to \mathbf{GF}\,\psi) \to \mathbf{GF}\,(\phi \to \psi)$

Λύση:

i. Έστω δομή M και μονοπάτι αυτής w, τότε

$w \models \mathbf{G}\,\phi \to \mathbf{F}\,\psi$	αν και μόνο αν	$w \models \neg\mathbf{G}\,\phi \vee \mathbf{F}\,\psi$
	αν και μόνο αν	όχι για κάθε $j \geq 0$ ισχύει $w[j] \models \phi$ ή $\exists j \geq 0$, $w[j] \models \psi$
	αν και μόνο αν	είτε $\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε $w[j] \models \neg\,\phi$ είτε $\exists j \geq 0$, $w[j] \models \psi$
	αν και μόνο αν	είτε $\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε, $w[j] \models \neg\,\phi$ και $\forall i < j\ w[i] \models \phi$ είτε, $\forall i$, $w[i] \models \neg\phi$ και $\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε, $w[j] \models \psi$
	συνεπάγεται ότι	$\exists j \geq 0$ τέτοιο ώστε, $w[j] \models \neg\phi \vee \psi$ και $\forall i < j\ w[i] \models \phi$
	αν και μόνο αν	$w \models p\ \mathbf{U}\ (q \vee \neg\, p)$

ii. Η ιδιότητα $(\mathbf{GF}\,\phi \to \mathbf{GF}\,\psi) \to \mathbf{G}\,(\phi \to \mathbf{F}\,\psi)$ δεν αποτελεί ταυτολογία. Ακολουθεί σχετικό αντιπαράδειγμα.



Η πιο πάνω δομή ικανοποιεί τη συνθήκη της συνεπαγωγής αλλά όχι το συμπέρασμα. Συγκεκριμένα, η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα **GF** φ, αφού η φ δεν είναι αληθής απείρως συχνά, επομένως η συνθήκη $(\mathbf{GF}\,\phi \to \mathbf{GF}\,\psi)$ είναι αληθής, αλλά, η ιδιότητα $\mathbf{G}\,(\phi \to \mathbf{F}\,\psi)$ δεν είναι αληθής αφού, αν και η φ ισχύει στην κατάσταση s_1, η **F** ψ δεν γίνεται ποτέ αληθής.

iii. Η ιδιότητα αποτελεί ταυτολογία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Για οποιαδήποτε δομή M και μονοπάτι w αυτής, έχουμε

$\omega \models \mathbf{G}\,\mathbf{G}(\phi \vee \neg\psi)$	συνεπάγεται ότι	$\omega^i \models \mathbf{G}(\phi \vee \neg\psi)$, για κάθε $i \geq 0$
	συνεπάγεται ότι	$(\omega^i)^j \models \phi \vee \neg\psi$, για κάθε $i,j \geq 0$
	συνεπάγεται ότι	$\omega^i \models \phi \vee \neg\psi$, για κάθε $i \geq 0$
	συνεπάγεται ότι	$\omega \models G(\phi \vee \neg\psi)$

	συνεπάγεται ότι	$\omega \models \neg\mathbf{F}\neg(\phi \vee \neg\psi)$,
	από τον ορισμό του G	
	συνεπάγεται ότι	$\omega \models \neg\mathbf{F}\,(\neg\phi \wedge \psi)$
	από τον ορισμό του $\wedge$	

Συνεπώς, σε οποιοδήποτε μονοπάτι ικανοποιείται η ιδιότητα $\mathbf{G}\,\mathbf{G}(\phi \vee \neg\psi)$ ικανοποιείται και η ιδιότητα $\neg\mathbf{F}\,(\neg\phi \wedge \psi)$, επομένως η ιδιότητα $\mathbf{GG}(\phi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg\mathbf{F}\,(\neg\phi \wedge \psi)$ αποτελεί ταυτολογία.

iv. Η ιδιότητα αποτελεί ταυτολογία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Για οποιαδήποτε δομή M και μονοπάτι w αυτής, έχουμε

$\omega \models \mathbf{GF}\,\phi \rightarrow \mathbf{GF}\,\psi$	συνεπάγεται ότι	$\omega \models \neg\mathbf{GF}\,\phi \vee \mathbf{GF}\,\psi$
	συνεπάγεται ότι	$\omega \models \neg\mathbf{GF}\,\phi$ ή $\omega \models \mathbf{GF}\,\psi$
	συνεπάγεται ότι	όχι $\omega \models \mathbf{GF}\,\phi$ ή $\omega \models \mathbf{GF}\,\psi$
	συνεπάγεται ότι	όχι [για κάθε i υπάρχει j τ.ω. $(\omega^i)^j \models \phi$]
		ή
		για κάθε i υπάρχει j τ.ω. $(\omega^i)^j \models \psi$
	συνεπάγεται ότι	υπάρχει i τ.ω. για κάθε j $(\omega^i)^j \models \neg\phi$
		ή
		για κάθε i υπάρχει j τ.ω. $(\omega^i)^j \models \neg\phi \vee \psi$
	συνεπάγεται ότι	υπάρχει i τ.ω. για κάθε j $(\omega^i)^j \models \neg\phi \vee \psi$
		ή
		για κάθε i υπάρχει j τ.ω. $(\omega^i)^j \models \phi \rightarrow \psi$
	συνεπάγεται ότι	υπάρχει i τ.ω. για κάθε j $\omega^{i+j} \models \phi \rightarrow \psi$
		ή
		για κάθε i, $\omega^i \models \mathbf{F}\,(\phi \rightarrow \psi)$
	συνεπάγεται ότι	για κάθε j υπάρχει i τ.ω. $\omega^j \models \mathbf{F}\,(\phi \rightarrow \psi)$
		ή $\omega \models \mathbf{GF}\,(\phi \rightarrow \psi)$
	συνεπάγεται ότι	$\omega \models \mathbf{GF}\,(\phi \rightarrow \psi)$ ή $\omega \models \mathbf{GF}\,(\phi \rightarrow \psi)$
	συνεπάγεται ότι	$\omega \models \mathbf{GF}\,(\phi \rightarrow \psi)$

Άσκηση 4

Θεωρήστε τη δομή Kripke από την Άσκηση 2. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω CTL ιδιότητες ικανοποιούνται από τη δομή. Να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL.

- **i.** $\mathbf{E\,G\,[(}b \vee c\mathbf{)} \wedge \mathbf{EF\,AG}\,b\mathbf{]}$
- **ii.** $\mathbf{[}a \rightarrow \mathbf{EG\,EX\,A\,(}b\,\mathbf{U}\,c\mathbf{)]} \vee \mathbf{[a} \wedge \mathbf{A\,X\,A(a\,U\,b)]}$
- **iii.** $\mathbf{EX\,(a} \wedge \neg\mathbf{b)} \wedge \mathbf{EX\,A(b\,U\,(A\,G\,a))}$

Λύση:

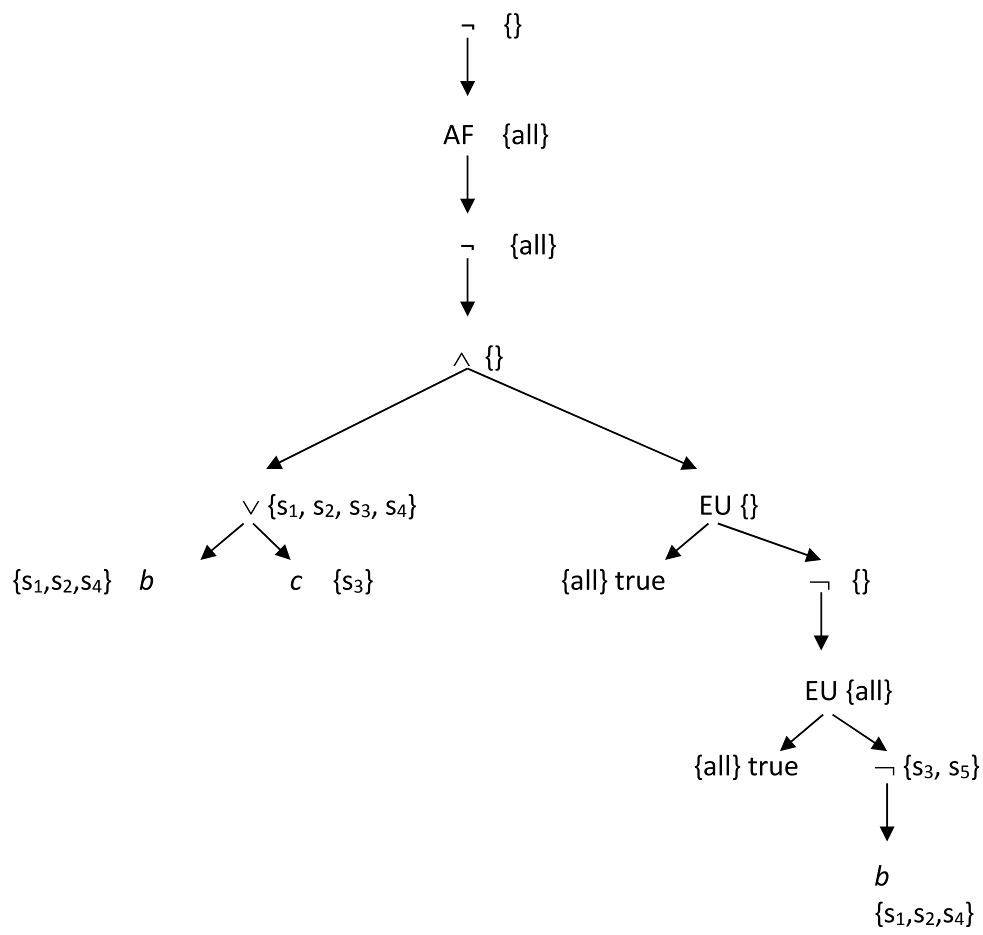
Αρχικά μετασχηματίζουμε την ιδιότητα σε μια ισοδύναμη, όπου εμφανίζονται μόνο οι τελεστές από το επαρκές σύνολο τελεστών όπως αυτό καθορίζεται από τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου, και στη συνέχεια δημιουργούμε το δέντρο που αντιστοιχεί στην ιδιότητα. Τέλος, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο μοντελοελέγχου της CTL υπολογίζουμε τις καταστάσεις στις οποίες ικανοποιείται η ιδιότητα ξεκινώντας από τα φύλλα του δέντρου και προχωρώντας προς τα πάνω.

i. $\mathrm{EG}\ [(b \lor c) \land \mathrm{EF\ AG}\ b]$

$\equiv \mathrm{EG}\ [(b \lor c) \land \mathrm{EF}\ (\neg \mathrm{EF} \neg b)]$

$\equiv \mathrm{EG}\ [(b \lor c) \land \mathrm{E}\ (\mathrm{true\ U}\ (\neg \mathrm{E}\ (\mathrm{true\ U} \neg b))]$

$\equiv \neg \mathrm{AF} \neg [(b \lor c) \land \mathrm{E}\ (\mathrm{true\ U}\ (\neg \mathrm{E}\ (\mathrm{true\ U} \neg b))]$



Η δομή δεν ικανοποιεί την ιδιότητα αφού η αρχική της κατάσταση δεν την ικανοποιεί.

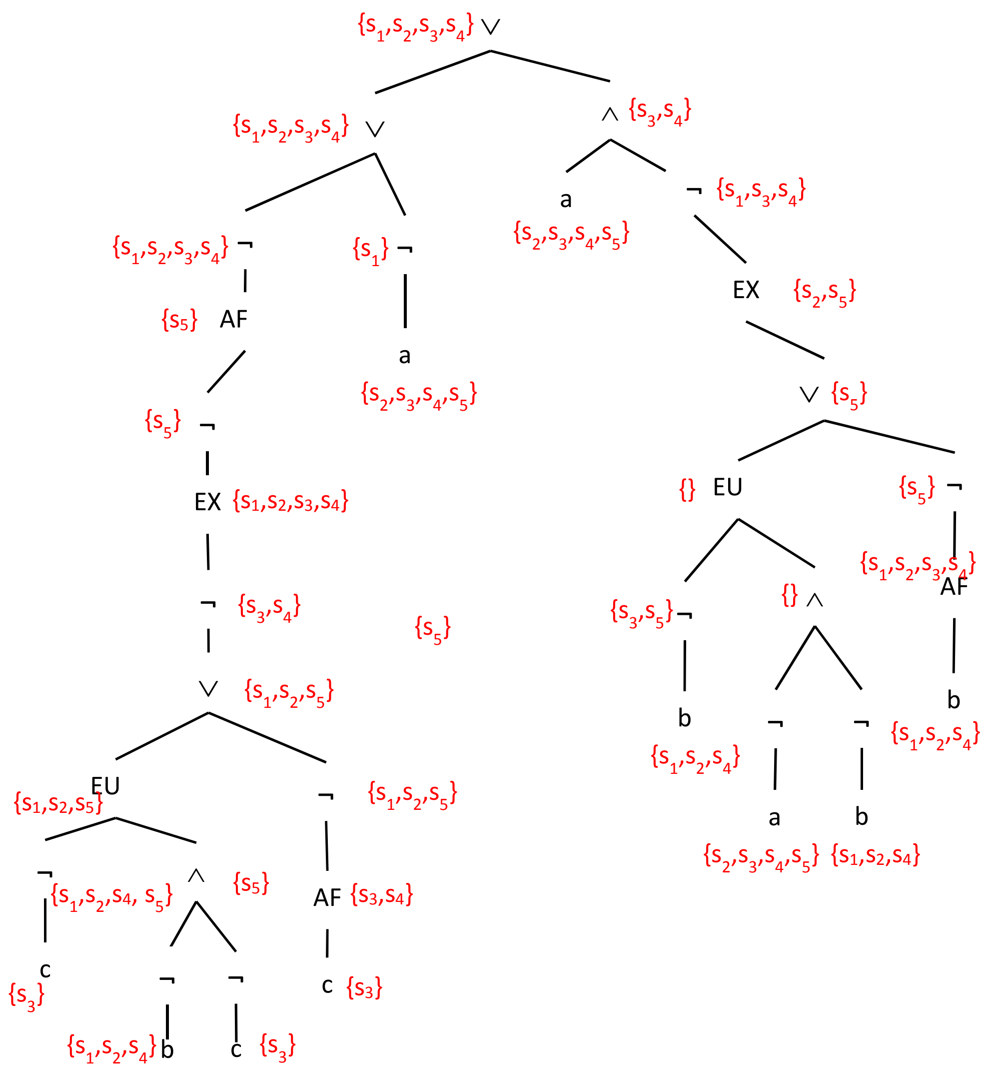
ii. $[a \rightarrow \mathrm{EG\ EX\ A}\ (b\ \mathrm{U}\ c)] \lor [\mathrm{a} \land \mathrm{AX\ A(aUb)}]$

$\equiv [\neg a \lor \mathrm{EG\ EX\ A}\ (b\ \mathrm{U}\ c)] \lor [a \land \neg \mathrm{EX\ A} \neg \mathrm{(aUb)}]$

$\equiv [\neg a \lor \mathrm{EG\ EX} \neg (\ \mathrm{E}[\neg c\ \mathrm{U}\ (\neg b \neg c)] \lor \mathrm{EG} \neg c)] \lor [a \land \neg \mathrm{EX} \neg \neg (\mathrm{E}[\neg b\ \mathrm{U}\ (\neg a \land \neg b)] \lor \mathrm{EG} \neg b)]$

$\equiv [\neg a \lor \mathrm{EG\ EX} \neg (\ \mathrm{E}[\neg c\ \mathrm{U}\ (\neg b \land \neg c)] \lor \neg \mathrm{AF}\ c)] \lor [a \land \neg \mathrm{EX}\ (\mathrm{E}[\neg b\ \mathrm{U} (\neg a \land \neg b)] \lor \mathrm{EG} \neg b)]$

$\equiv [\neg a \lor \neg \mathrm{AF} \neg (\mathrm{EX} \neg (\mathrm{E}[\neg c\ \mathrm{U}\ (\neg b \land \neg c)] \lor \neg \mathrm{AF}\ c))] \lor [a \land \neg \mathrm{EX}\ (\mathrm{E}[\neg b\ \mathrm{U}\ (\neg a \land \neg b)] \lor \neg \mathrm{AF}\ b)]$



Η αρχική κατάσταση ικανοποιεί την ιδιότητα, επομένως και η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.

iii. $EX\,(a \wedge \neg b) \wedge EX\,A(b\ U\ (A\,G\,a)) \equiv EX\,(a \wedge \neg b) \wedge EX\,A(b\ U\ (\neg\,EF\,\neg\,a))$

$\equiv EX\,(a \wedge \neg b) \wedge EX\,\neg(E[(\neg\neg EF\,\neg\,a)\ U\ (\neg b \wedge \neg\,\neg EF\,\neg\,a)] \vee EG\,\neg(\neg\,EF\,\neg\,a))$

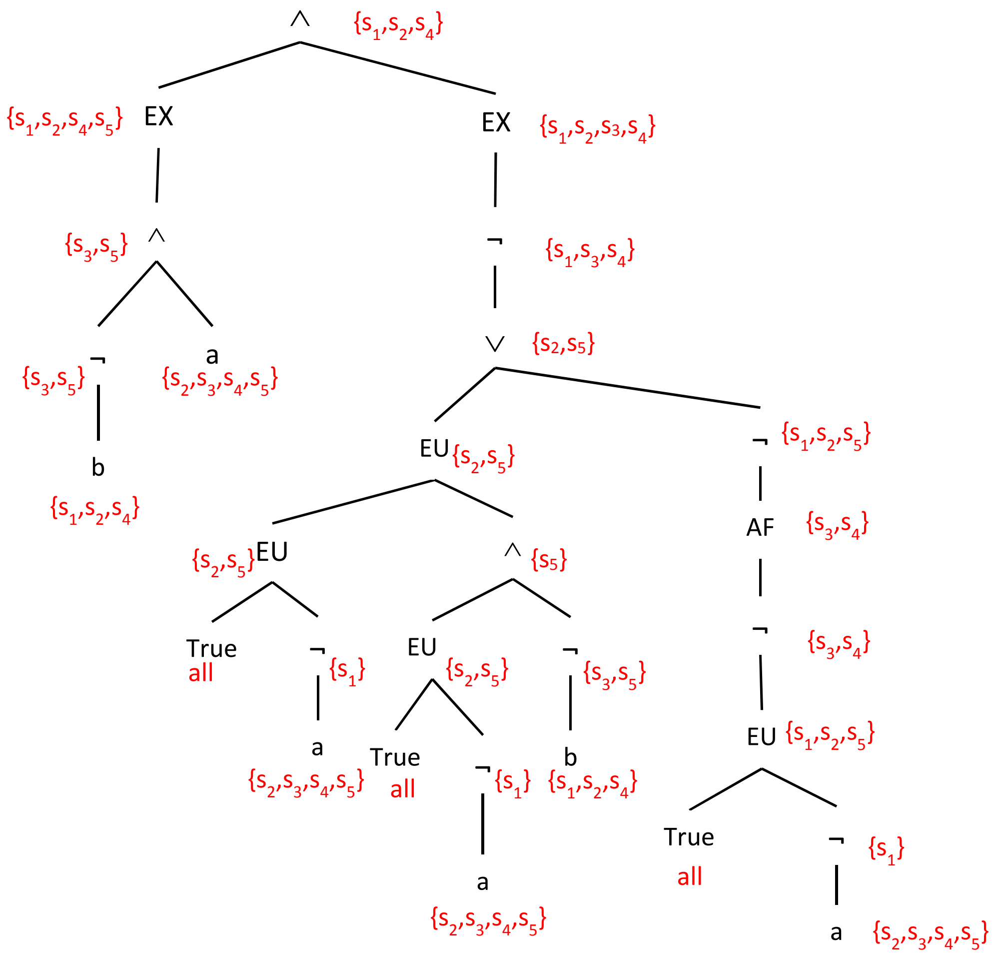
$\equiv EX\,(a \wedge \neg b) \wedge EX\,\neg(E[EF\,\neg\,a\ U\ (\neg b \wedge EF\,\neg\,a)] \vee EG\,EF\,\neg\,a)$

$\equiv EX(a \wedge \neg b)$

$\wedge\ EX\,\neg(E[E(True\ U\ \neg a)\ U(\neg b \wedge E(True\ U\ \neg\,a)))] \vee EG\,E\,(True\ U \neg\,a))$

$\equiv EX(a \wedge \neg b)$

$\wedge\ EX\,\neg(E[E(True\ U\ \neg a)\ U(\neg b \wedge E(True\ U\ \neg\,a))] \vee \neg AF\,\neg\,E\,(True\ U \neg\,a))$



Η αρχική κατάσταση ικανοποιεί την ιδιότητα, επομένως και η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα.

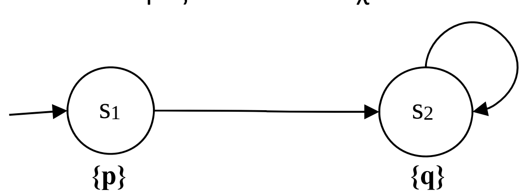
Άσκηση 5

Δύο ιδιότητες φ και ψ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, φ ≡ ψ, αν για κάθε δομή Kripke M, M ⊨ φ αν και μόνο αν M ⊨ ψ. Να αποφασίσετε ποια από τα πιο κάτω ζεύγη προτάσεων περιέχουν ισοδύναμες προτάσεις. Αν δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες να δώσετε απόδειξη *χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία*, διαφορετικά, να παρουσιάσετε δομή Kripke στην οποία να ικανοποιείται η μία ιδιότητα αλλά όχι η άλλη.

i. **$EG\ q \lor (EG\ p \land EF\ q) \equiv E(p\ U\ q)$**
ii. **$A(p\ U\ q) \equiv \neg E\,[(\neg q\ U\ (\neg p \land \neg q))] \land AF\ p$**

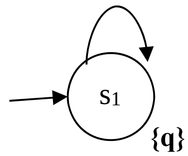
Λύση:

i. Οι δύο ιδιότητες δεν είναι ισοδύναμες. Ακολουθεί σχετικό αντιπαράδειγμα.



Η πιο πάνω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα E(pUq) αλλά όχι την EG q ούτε και την EG $p \wedge$EF q.

ii. Οι δύο ιδιότητες δεν είναι ισοδύναμες. Ακολουθεί σχετικό αντιπαράδειγμα.



Η πιο πάνω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα A(p U q) αλλά όχι την AF p (επομένως ούτε και την $\neg$E [($\neg$q U ($\neg$p $\wedge$ $\neg$q))] $\wedge$ AF p).

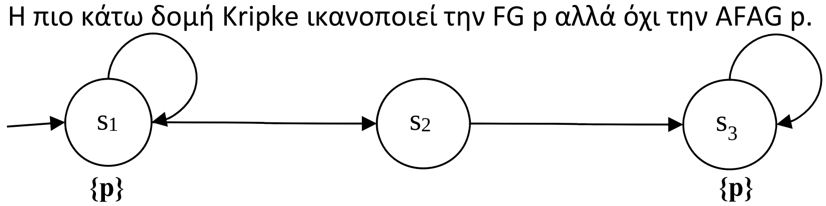
<u>Άσκηση 6</u>

Να δείξετε ότι τα πιο κάτω ζεύγη προτάσεων ιδιοτήτων LTL και CTL δεν είναι ισοδύναμα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας με ακρίβεια.

i.	**FG p**	**και**	**AFAG p**
ii.	**FX p**	**και**	**AFAX p**
iii.	**G p $\vee$ G q**	**και**	**AG p $\vee$ AG q**

<u>Λύση:</u>

i. Η πιο κάτω δομή Kripke ικανοποιεί την FG p αλλά όχι την AFAG p.



Η δομή ικανοποιεί την ιδιότητα FG p σε κάθε μονοπάτι της δομής. Εντούτοις η ιδιότητα AFAG p δεν ικανοποιείται. Αυτό οφείλεται στο μονοπάτι $s_1 \ldots s_1 \ldots$ όπου δεν υπάρχει κατάσταση από την οποία κάθε μονοπάτι να ικανοποιεί AG p, συγκεκριμένα το μονοπάτι $s_1 s_2 s_3 \ldots$ δεν ικανοποιεί σε κάθε κατάστασή του την ατομική πρόταση p.

ii. Η δομή από το σκέλος i λειτουργεί και πάλι ως αντιπαράδειγμα για τη μη ισοδυναμία των προτάσεων: Ενώ σε κάθε μονοπάτι υπάρχει κάποια στιγμή στο μέλλον της οποίας η επόμενη ικανοποιεί το p, αν εστιάσουμε στο μονοπάτι $s_1 \ldots s_1 \ldots$ δεν ισχύει ότι υπάρχει κατάσταση από την οποία κάθε επόμενη να ικανοποιεί το p.

iii. Η πιο κάτω δομή ικανοποιεί την ιδιότητα G p $\vee$ G q αλλά όχι την AG p $\vee$ AG q.