Τμήμα Πληροφορικής
Άννα Φιλίππου

Σειρά Προβλημάτων 2 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να θεωρήσετε τις προτάσεις (1) – (6) που ακολουθούν και να αποφασίσετε κατά πόσο ισχύουν οι σχέσεις στον πίνακα που αφορούν τις προτάσεις. Αν μια πρόταση ισχύει να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία του Τάρσκι, διαφορετικά να παρουσιάστε μοντέλο στο οποίο η σχέση να είναι ψευδής.

(1) $\forall x \forall y\, Q(x,y)$

(2) $\exists x \forall y\, Q(x,y)$

(3) $\forall x\, (P(x) \vee R(x))$

(4) $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, R(x)$

(5) $\forall x\, (P(x) \vee \forall y\, Q(x,y))$

(6) $\forall x\, P(x) \vee \forall x \forall y\, Q(x,y))$

(1) $\rightarrow$ (2)
(2) $\rightarrow$ (1)
(3) $\rightarrow$ (4)
(4) $\rightarrow$ (3)
(5) $\rightarrow$ (6)
(6) $\rightarrow$ (5)

Λύση:

(1) $\rightarrow$ (2)

Η συνεπαγωγή είναι αληθής και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο μοντέλο M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\forall x \forall y\, Q(x,y)$. Τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι $M \models Q^A(a,b)$ για κάθε a, $b \in A$. Επομένως, $M \models Q^A(a,b)$ για κάποιο $a \in A$ και κάθε $b \in A$. Αυτό συνεπάγεται ότι $M \models \forall y\, Q^A(a,y)$ για κάποιο $a \in A$ και $M \models \exists x\, \forall y\, Q^A(a,y)$.

(2) $\rightarrow$ (1)

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο
Σύμπαν Σ : οι θετικοί ακέραιοι (συμπεριλαμβανομένου του 0)

$Q(x,y)$: $x \leq y$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση (2) αφού $0 \leq y$ για κάθε θετικό ακέραιο y, αλλά δεν ισχύει η πρόταση (1).

(3) $\rightarrow$ (4)

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο
Σύμπαν Σ : οι θετικοί ακέραιοι

$P(x)$: ο x είναι άρτιος

$Q(x)$: ο x είναι περιττός

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση (3) αφού κάθε ακέραιος είναι είτε θετικός είτε άρτιος, αλλά δεν ικανοποιείται η πρόταση (4) αφού δεν ισχύει ότι όλοι οι ακέραιοι είναι άρτιοι ούτε και ότι όλοι οι ακέραιοι είναι περιττοί.

(4) $\rightarrow$ (3)

Η συνεπαγωγή είναι αληθής και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο μοντέλο M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, R(x)$. Τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι $M \models \forall x\, P(x)$ ή $M \models \forall x\, R(x)$. Επομένως, $M \models P^M(a)$ για κάθε $a \in A$ ή $M \models R^M(a)$ για κάθε $a \in A$.

- Αν ισχύει ότι $M \models P^M(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε $M \models P^M(a) \vee R^M(a)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models \forall x\, (P^M(x) \vee R^M(x))$.
- Εναλλακτικά, αν ισχύει ότι $M \models R^M(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε $M \models P^M(a) \vee R^M(a)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models \forall x\, (P^M(x) \vee R^M(x))$.

Και στις δύο περίτπωσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $M \models \forall x\, (P^M(x) \vee R^M(x))$. Επομένως, στο μοντέλο M ικανοποιείται η πρόταση $\forall x\, (P(x) \vee R(x))$ και το ζητούμενο έπεται.

(5) → (6)

Η συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μοντέλο
Σύμπαν Σ : οι θετικοί ακέραιοι (συμπεριλαμβανομένου του 0)

$P(x)$: ο x είναι άνισος με το 0

$Q(x,y)$: $x \leq y$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ικανοποιείται η πρόταση (5) αλλά δεν ικανοποιείται η πρόταση (6).

(6) → (5)

Η συνεπαγωγή είναι αληθής και μπορούμε να το αποδείξουμε ως ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο μοντέλο M με σύμπαν A ισχύει η πρόταση $\forall x\, P(x) \vee \forall x \forall y\, Q(x,y))$. Τότε, από την αλήθεια του Τάρσκι συμπεραίνουμε ότι $M \models \forall x\, P^M(x)$ ή $M \models \forall x \forall y\, Q^M(x,y))$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν ισχύει ότι $M \models P^M(a)$ για κάθε $a \in A$, τότε $M \models P^M(a) \vee \forall y\, Q^M(a,y)$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models \forall x\, (P^M(a) \vee \forall y\, Q^M(a,y))$.
- Εναλλακτικά, αν ισχύει ότι $M \models \forall x \forall y\, Q^M(x,y))$ τότε $M \models \forall y\, Q^M(a,y))$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $M \models P^M(a) \vee \forall y\, Q^M(a,y)$ που συνεπάγεται ότι $M \models \forall x\, (P^M(x) \vee \forall y\, Q^M(x,y))$.

Και στις δύο περίτπωσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $M \models \forall x\, (P^M(x) \vee \forall y\, Q^M(x,y))$. Επομένως, στο μοντέλο M ικανοποιείται η πρόταση $\forall x\, (P(x) \vee \forall y\, Q(x,y))$ και το ζητούμενο έπεται.

<u>Άσκηση 2</u>

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα του κατηγορηματικού λογισμού.

(α) $\exists x\, \phi \to \psi \vdash \forall x\, (\phi \to \psi)$, **όπου το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ψ**

(β) $\exists x\, (\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x\, \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$

(γ) $\forall x \forall y\, [\neg(x = y) \to (P(x,y) \vee P(y,x))],\ \forall x \forall y \forall z\, [P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)],\ \forall x\, \neg P(x,x)$

$$\vdash \forall x \forall y\, \neg[P(x,y) \wedge P(y,x)]$$

(δ) $\forall x\, f(f(f(x))) = f(f(x)),\ \forall x \forall y\, ((y = f(x) \to (f(y) = x))) \vdash \forall x\, (x = f(x))$

(ε) $\forall x\, [\neg S(x) \to (\neg Q(x) \vee R(x))],\ \exists x[\, R(x) \vee \neg S(x)] \vdash \forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists y\, R(y)$

Λύση:

(α) $\exists x\, \phi \rightarrow \psi \vdash \forall x\, (\phi \rightarrow \psi)$, όπου το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην πρόταση ψ

1.	$\exists x\, \phi \rightarrow \psi$	προϋπόθεση
2.	x_0	
3.	$\phi[x_0/x]$	πρ. υπόθεση
4.	$\exists x\, \phi$	$\exists x$ i 3
5.	ψ	MP 1, 4
6.	$\phi[x_0/x] \rightarrow \psi$	$\rightarrow$ i 3-6
7.	$\forall x\, (\phi \rightarrow \psi)$	$\forall x$ i 2-6 *

$*(\phi\rightarrow\psi)[x_0/x] = \phi[x_0/x]\rightarrow\psi[x_0/x] = \phi[x_0/x] \rightarrow \psi$, από την υπόθεση ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στη ψ

(β) $\exists x\, (\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x\, \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$

1.	$\exists x\, (\neg P(x) \vee Q(x))$	προϋπόθεση
2.	x_0 $\quad \neg P(x_0) \vee Q(x_0)$	υπόθεση
3.	$\neg P(x_0)$	υπόθεση
4.	$P(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$	υπόθεση
5.	$P(x_0)$	$\wedge e_1$ 4
6.	$\perp$	$\neg e$ 3, 5
7.	$\neg(P(x_0) \wedge \neg Q(x_0))$	$\neg i$ 4-6
8.	$\exists x\, \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$\exists x$ i 7
9.	$Q(x_0)$	υπόθεση
10.	$(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$	υπόθεση
11.	$\neg Q(x_0)$	$\wedge e_2$ 10
12.	$\perp$	$\neg e$ 9, 11
13.	$\neg(P(x_0) \wedge \neg Q(x_0))$	$\neg i$ 10-12
14.	$\exists x\, \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$\exists x$ i 13
15.	$\exists x\, \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$\vee_e$ 2, 3-8, 9-14
16.	$\exists x\, \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$\exists x$ e 1 2-15

(γ) $\forall x \forall y\, [\neg(x = y) \rightarrow (P(x,y) \vee P(y,x))]$, $\forall x \forall y \forall z\, [P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)]$, $\forall x\, \neg P(x,x)$ $\vdash \forall x \forall y\, \neg[P(x,y) \wedge P(y,x)]$

1.	$\forall x \forall y\, [\neg(x = y) \rightarrow (P(x,y) \vee P(y,x))]$	προϋπόθεση
2.	$\forall x \forall y \forall z\, [P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)]$	προϋπόθεση
3.	$\forall x\, \neg P(x,x)$	προϋπόθεση
4.	x_0	
5.	y_0	
6.	$P(x_0,y_0) \wedge P(y_0,x_0)$	υπόθεση
7.	$\forall y \forall z\, [P(x_0,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x_0,z)]$	$\forall x$ e 2
8.	$\forall z\, [P(x_0,y_0) \wedge P(y_0,z) \rightarrow P(x_0,z)]$	$\forall y$ e 7
9.	$P(x_0,y_0) \wedge P(y_0,x_0) \rightarrow P(x_0,x_0)$	$\forall z$ e 8
10.	$P(x_0,x_0)$	MP 9, 6
11.	$\neg P(x_0,x_0)$	$\forall x$ e 3
12.	$\perp$	$\neg e$ 11, 10
13.	$\neg(P(x_0,y_0) \wedge P(y_0,x_0))$	$\neg i$ 6-12
14.	$\forall y\, \neg(P(x_0,y) \wedge P(y,x_0))$	$\forall y$ i 5-13
15.	$\forall x \forall y\, \neg(P(x,y) \wedge P(y,x))$	$\forall x$ i 4-14

(δ) $\forall x\, f(f(f(x))) = f(f(x)),\ \forall x \forall y\, ((y = f(x)) \to (f(y) = x)) \vdash \forall x\, (x = f(x))$

1.	$\forall x\, f(f(f(x))) = f(f(x))$	προϋπόθεση
2.	$\forall x \forall y\, ((y = f(x)) \to (f(y) = x))$	προϋπόθεση
3.	a	
4.	$f(f(f(a))) = f(f(a))$	$\forall x$ e 1
5.	$\forall y\, ((y = f(f(a))) \to (f(y) = f(a)))$	$\forall x$ e 2 ([f(a)/x])
6.	$f(f(f(a))) = f(f(a)) \to f(f(f(f(a)))) = f(a)$	$\forall y$ e 5 ([f(f(f(a)))/y])
7.	$f(f(f(f(a)))) = f(a)$	MP 6, 4
8.	$\forall y\, ((y = f(a)) \to (f(y) = a))$	$\forall x$ e 2 ([a/x])
9.	$f(f(f(f(a)))) = f(a) \to f(f(f(f(f(a))))) = a$	$\forall y$ e 5 ([f(f(f(f(a))))/y])
10.	$f(f(f(f(f(a))))) = a$	MP 9, 7
11.	$f(f(f(f(a)))) = a$	= e 10, 4 [f(f(x)) = a]
12.	$f(f(f(a))) = a$	= e 11, 4 [f(x) = a]
13.	$f(f(a)) = a$	= e 12, 4 [x = a]
14.	$f(f(f(a)) = f(a)$	= e 7, 4 [f(x) = f(a)]
15.	$f(f(a)) = f(a)$	= e 14, 4 [x = f(a)]
16.	$f(a) = a$	= e 13, 15 [x = a]
17.	$f(a) = f(a)$	= i
18.	$a = f(a)$	= e 17, 16 [x = f(a)]
19.	$\forall x\, (x = f(x))$	$\forall x$ i 3-18

(ε) $\forall x\, [\neg S(x) \to (\neg Q(x) \vee R(x))],\ \exists x [\, R(x) \vee \neg S(x)] \vdash \forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists y\, R(y)$

1.	$\forall x\, [\neg S(x) \to (\neg Q(x) \vee R(x))]$	προϋπόθεση
2.	$\exists x [\, R(x) \vee \neg S(x)]$	προϋπόθεση
3.	$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$	υπόθεση
4.	$x_0\ \ R(x_0) \vee \neg S(x_0)$	υπόθεση
5.	$R(x_0)$	πρ. υπόθεση
6.	$\exists y\, R(y)$	$\exists y$ i 5
7.	$\neg S(x_0)$	πρ. υπόθεση
8.	$\neg S(x_0) \to (\neg Q(x_0) \vee R(x_0))$	$\forall x$ e 1
9.	$\neg Q(x_0) \vee R(x_0)$	MP 8, 7
10.	$\neg Q(x_0)$	πρ. υπόθεση
11.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\forall x$ e 3
12.	$Q(x_0)$	$\forall x$ e 11
13.	$\bot$	$\neg$ e 10, 12
14.	$\exists y\, R(y)$	$\bot$ e 13
15.	$R(x_0)$	πρ. υπόθεση
16.	$\exists y\, R(y)$	$\exists y$ i 15
17.	$\exists y\, R(y)$	$\vee$ e 9, 10-14, 15, 16
18.	$\exists y\, R(y)$	$\vee$ e 4, 5-6, 7-17
19.	$\exists y\, R(y)$	$\exists y$ e 2, 4-18
20.	$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists y\, R(y)$	$\to$ i 3-20

Άσκηση 3

Θεωρήστε την πιο κάτω γλώσσα Κατηγορηματικού Λογισμού

- **Σταθερές: 0**
- **Συναρτήσεις: s(x)** ***[Εξήγηση: Για x ακέραιο, το s(x) αναπαριστά τον ακέραιο x+1]***
- **Κατηγορήματα: Sum, Product, όπου**
    - **Sum(x,y,z) αν z = x + y**
    - **Product(x,y,z) αν *z = x·y***

Επιπρόσθετα, θεωρήστε τα πιο κάτω αξιώματα

A1: $\forall$x Sum(x,0,x) ***[Εξήγηση: x+0 = x]***

A2: $\forall$x$\forall$y$\forall$z [Sum(x,y,z) $\rightarrow$ Sum(x,s(y),s(z))] ***[Εξήγηση: Αν x+y = z τότε x+(y+1)=(z+1)]***

A3: $\forall$x Product(x,0,0) ***[Εξήγηση: x·0 = 0]***

A4: $\forall$x$\forall$y$\forall$z$\forall$w [(Product(x,y,w) $\wedge$ Sum(x,w,z)) $\rightarrow$ Product(x,s(y),z)]

[Εξήγηση: Αν x·y = w και x+w = z τότε x·(y+1) = z]

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της SLD επίλυσης να αποδείξετε ότι αν ισχύουν τα αξιώματα Α1 – Α4 τότε ισχύει και το συμπέρασμα $\exists$x Product(x,x,s(0)) και να δώσετε τη σχετική αντικατάσταση ορθής απάντησης.

Λύση:

Καταγράφουμε τα αξιώματα και το συμπέρασμα ως πρόγραμμα λογικού προγραμματισμού και εφαρμόζουμε τη Μέθοδο της Επίλυσης λαμβάνοντας τα πιο κάτω:

1. Sum(x,0,x)
2. Sum(x,s(y),s(z)) $\leftarrow$ Sum(x,y,z)
3. Product(x,0,0)
4. Product(x,s(y),z) $\leftarrow$ Product(x,y,w), Sum(x,w,z)
5. $\leftarrow$Product(x,x,s(0))
6. $\leftarrow$ Product(s(y),y,w), Sum(s(y),w,s(0)) — από γραμμή 4 (όπου μετονομάζουμε το x σε x’) και αντικατάσταση [x/x’,s(y)/x,s(0)/z]
7. $\leftarrow$ Sum(s(0),0,s(0)) — από γραμμή 3 και αντικατάσταση [s(y)/x,0/y,0/w]
8. $\leftarrow \perp$ — από 1 και αντικατάσταση [s(0)/x]

Η αντικατάσταση ορθής απάντησης είναι η [s(0)/x] (από βήματα 6 και 7).

Άσκηση 4

Το Minesweeper είναι ένα παιχνίδι υπολογιστή για έναν παίκτη που εφευρέθηκε από τον Robert Donner το 1989. Στόχος του παιχνιδιού είναι να καθαρίσει ένα ναρκοπέδιο χωρίς να εκραγεί καμιά νάρκη. Η οθόνη του παιχνιδιού αποτελείται από μια ορθογώνια σχάρα τετραγώνων. Κάθε τετράγωνο μπορεί να αποκαλυφθεί κάνοντας κλικ σε αυτό. Αν ο παίκτης επιλέξει ένα τετράγωνο το οποίο περιέχει μία νάρκη το παιχνίδι τελειώνει. Εάν το τετράγωνο δεν περιέχει νάρκη τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις: (1) Εμφανίζεται ένας αριθμός μεταξύ 1 και 8 που υποδεικνύει τον αριθμό γειτονικών (συμπεριλαμβανομένων διαγωνίως παρακείμενων) τετραγώνων που περιέχουν νάρκες, ή (2) δεν εμφανίζεται

κανένας αριθμός, στην οποία περίπτωση δεν υπάρχουν νάρκες στα γειτονικά τετράγωνα. Ένα παράδειγμα της κατάστασης παιχνιδιού παρέχεται στο παρακάτω σχήμα:

Στην άσκηση αυτή σας ζητείται να προτείνετε μια γλώσσα κατηγορηματικού λογισμού που επιτρέπει τον χαρακτηρισμό μιας κατάστασης του παιχνιδιού.

Να χρησιμοποιήσετε τη γλώσσα σας για να δηλώσετε τα πιο κάτω:

1. Υπάρχουν ακριβώς n νάρκες στο ναρκοπέδιο

2. Εάν ένα κελί περιέχει τον αριθμό 1, τότε υπάρχει ακριβώς μία νάρκη στα γειτονικά τετράγωνα.

3. Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα σας να περιγράψετε την κατάσταση του παιχνιδιού από το πιο πάνω σχήμα και να αποδείξετε ότι στο κελί (3,3) υπάρχει μια νάρκη. (Θεωρήστε ότι το κελί (1,1) είναι το κελί πάνω και αριστερά.)

[Εισήγηση: Χρησιμοποιήστε το κατηγόρημα Adj(x,y) για να δηλώσετε το γεγονός ότι τα κελιά x και y είναι γειτονικά.]

<u>Λύση:</u>

- Σταθερές: (1,1), ..., (8,8), 1, ..., 8
- Κατηγορήματα: mine((x,y)), contains((x,y),i), Adj ((x,y),(u,v)), όπου
  - mine((x,y)) αν υπάρχει νάρκη στο κελί (x,y)
  - contains((x,y),i) αν το κελί (x,y) έχει i γείτονες που περιέχουν νάρκες
  - Adj ((x,y),(u,v)) αν τα κελιά (x,y) και (u,v) είναι γειτονικά

Οι ζητούμενες προτάσεις μπορούν να συλληφθούν στη γλώσσα ως εξής:

1. Υπάρχουν ακριβώς n νάρκες στο ναρκοπέδιο

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \, [\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} (\neg(i=j) \rightarrow \neg(x_i = x_j))$$
$$\wedge (\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n} mine(x_i))$$
$$\wedge \forall y \, (mine(y) \rightarrow \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} y = x_i) \;]$$

2. Εάν ένα κελί περιέχει τον αριθμό 1, τότε υπάρχει ακριβώς μία νάρκη στα γειτονικά τετράγωνα.

$$\forall x \, [\, contains(x,1) \rightarrow \exists y \, (\, Adj(x,y) \wedge mine(y) \wedge \forall z \, ((Adj(x,z) \wedge mine(z)) \rightarrow y=z) \,) \,]$$

Για να αποδείξουμε ότι στο κελί (3,3) υπάρχει νάρκη, μπορούμε να περιγράψουμε την (σχετική) κατάσταση του παιχνιδιού από το σχήμα ως εξής:

1. contains((2,2),1) προϋπόθεση
2. $\forall x \, [\, Adj((2,2),x) \rightarrow (\, x = (1,1) \vee x = (1,2) \vee x = (1,3) \vee x = (2,1) \vee x = (2,3) \vee x = (3,1) \vee x = (3,2) \vee x = (3,3)]$ προϋπόθεση

3. $\neg$mine((1,1)) προϋπόθεση
4. $\neg$mine((1,2)) προϋπόθεση
5. $\neg$mine((1,3)) προϋπόθεση
6. $\neg$mine((2,1)) προϋπόθεση
7. $\neg$mine((2,3)) προϋπόθεση
8. $\neg$mine((3,1)) προϋπόθεση
9. $\neg$mine((3,2)) προϋπόθεση

Και σε συνδυασμό με το (2) πιο πάνω:

10. $\forall$x [contains(x,1) $\rightarrow$ $\exists$y (Adj(x,y) $\wedge$ mine(y) $\wedge$ $\forall$z ((Adj(x,z) $\wedge$ mine(z)) $\rightarrow$ y=z))

έχουμε

11. contains((2,2),1) $\rightarrow$ $\exists$y Adj((2,2),y)$\wedge$mine(y)$\wedge\forall$z ((Adj((2,2),z)$\wedge$mine(z))$\rightarrow$y=z)) $\forall$x e 11
12. $\exists$y Adj((2,2),y) $\wedge$ mine(y) $\wedge$ $\forall$z ((Adj((2,2),z) $\wedge$ mine(z)) $\rightarrow$ y=z) MP 12, 1
13. b
14. Adj((2,2),b) $\wedge$ mine(b) $\wedge$ $\forall$z (Adj((2,2),z) $\wedge$ mine(z)) $\rightarrow$ b=z) πρ. υπ.
15. Adj(2,2),b) $\rightarrow$ (b = (1,1) $\vee$ b = (1,2) $\vee$ b = (1,3) $\vee$ b = (2,1) $\vee$ b = (2,3) $\vee$ b = (3,1) $\vee$ b = (3,2) $\vee$ b = (3,3)] $\forall$x e 2
16. Adj((2,2),b) $\wedge$ e 15
17. (b = (1,1) $\vee$ b = (1,2) $\vee$ b = (1,3) $\vee$ b = (2,1) $\vee$ b = (2,3) $\vee$ b = (3,1) $\vee$ b = (3,2) $\vee$ b = (3,3)) MP 16, 17
18. b = (1,1) πρ. υπ.
19. mine(b) $\wedge$ e 15
20. mine((1,1)) = e 19, 20
21. $\perp$ $\neg$ e 3, 21
22. mine((3,3)) $\perp$ e 22
23. b = (1,2) πρ. υπ.
24. mine(b) $\wedge$ e 15
25. mine((1,2)) = e 24, 25
26. $\perp$ $\neg$ e 4, 26
27. mine((3,3)) $\perp$ e 27
28. …
29. b = (3,2) πρ. υπ.
30. mine(b) $\wedge$ e 15
31. mine((3,2)) = e 30, 31
32. $\perp$ $\neg$ e 9, 32
33. mine((3,3)) $\perp$ e 33
34. b = (3,3) πρ. υπ.
35. mine(b) $\wedge$ e 15
36. mine((3,3)) = e 35, 36
37. mine((3,3)) $\vee$ 18, 19-37
38. mine((3,3)) $\exists$y i 13, 14-38