Σειρά Προβλημάτων 1 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να διατυπώσετε τον πιο κάτω συλλογισμό στον Προτασιακό Λογισμό και να τον αποδείξετε χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο της Επίλυσης. Δηλαδή, να δείξετε ότι αν ισχύουν οι πέντε πρώτες προτάσεις, τότε ισχύει και το συμπέρασμα στην έκτη πρόταση. Κατά τη μετάφραση των προτάσεων στον ΠΛ να χρησιμοποιήσετε μόνο πέντε μεταβλητές προσδιορίζοντας με σαφήνεια ποια πρόταση της φυσικής γλώσσας αντιστοιχεί σε κάθε μεταβλητή.

> ***Αν η κίνηση υπάρχει, τότε κάποιος μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο Χ στο σημείο Υ σε πεπερασμένο χρόνο.***
>
> ***Δεδομένου ότι ανά πάσα στιγμή κάποιος μπορεί να βρίσκεται μόνο σε ένα σημείο, δεν είναι δυνατόν κάποιος να διασχίσει ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων σε πεπερασμένο χρόνο.***
>
> ***Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία Χ και Υ μπορεί να διαιρεθεί σε ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων.***
>
> ***Ανά πάσα στιγμή κάποιος μπορεί να βρίσκεται σε ακριβώς ένα σημείο.***
>
> ***Αν κάποιος μπορεί να μετακινηθεί από το Χ στο Υ σε πεπερασμένο χρόνο τότε, είτε η απόσταση από το Χ στο Υ δεν μπορεί να διαιρεθεί σε ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων, είτε κάποιος μπορεί να διασχίσει ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων σε πεπερασμένο χρόνο.***
>
> ***Επομένως, δεν υπάρχει η κίνηση.***

(Ζήνων ο Ελεάτης, 5ος αιώνας π.Χ. – Το Παράδοξο της Κίνησης)

Λύση:

Για τη διατύπωση των προτάσεων στον Προτασιακό λογισμό θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο κάτω ατομικές προτάσεις.

Κ: *Υπάρχει η κίνηση*

Π: *Κάποιος μπορεί να μετακινηθεί από το σημείο Χ στο σημείο Υ σε πεπερασμένο χρόνο*

Ε: *Κάποιος μπορεί να βρίσκεται σε ακριβώς ένα σημείο ανά πάσα στιγμή*

Α: *Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία Χ και Υ μπορεί να διαιρεθεί σε ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων*

Δ: *Κάποιος μπορεί να διασχίσει ένα μη πεπερασμένο αριθμό σημείων σε πεπερασμένο χρόνο*

Οι προτάσεις της άσκησης μεταφράζονται στον Προτασιακό Λογισμό ως τις πιο κάτω προτάσεις:

H_1: $Κ \rightarrow Π$

H_2: $Ε \rightarrow \neg Δ$

H_3: $Α$

H_4: $Ε$

H_5: $Π \rightarrow (\neg Α \vee Δ)$

Και το συμπέρασμα είναι το

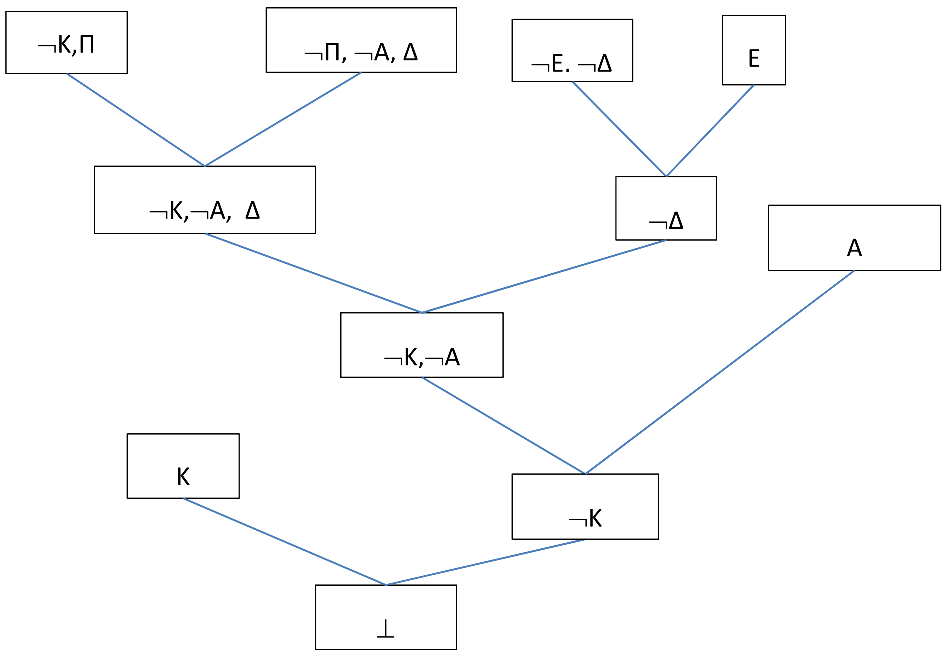
C: $\neg$K

Συνεχίζουμε μετατρέποντας τις προτάσεις σε CNF. Θεωρούμε την άρνηση της πρότασης-συμπέρασμα.

1. $\neg Κ \vee Π$
2. $\neg Ε \vee \neg Δ$
3. Α
4. Ε
5. $\neg Π \vee \neg Α \vee Δ$
6. Κ

Και σε προτασιακή μορφή:
$\{\{\neg Κ, Π\}, \{\neg Ε, \neg Δ\}, \{Α\}, \{Ε\}, \{\neg Π, \neg Α, Δ\}, \{Κ\}\}$

Εφαρμογή της Μεθόδου της Επίλυσης μας οδηγεί σε διάψευση όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Επομένως, ο συλλογισμός είναι ικανοποιήσιμος.



<u>Άσκηση 2</u>

Να αποδείξετε τα πιο κάτω λογικά επακόλουθα.

(α) $(\neg p \to r) \to (s \wedge \neg t), \neg p \to (q \vee r), q \to r \vdash \neg t$

(β) $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$

(γ) $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$

(δ) $\vdash ((p \vee q) \to r) \to ((p \to r) \wedge (\neg r \to \neg q))$

(ε) $p \to (q \to r), q, r \to t, (p \to t) \to (q \to s) \vdash s$

<u>Λύση:</u>

(α) $(\neg p \to r) \to (s \wedge \neg t), \neg p \to (q \vee r), q \to r \vdash \neg t$

1.	$(\neg p \to r) \to (s \wedge \neg t)$			προϋπόθεση
2.	$\neg p \to (q \vee r)$			προϋπόθεση
3.	$q \to r$			προϋπόθεση
4.	$\neg p$			πρ. υπόθεση
5.	$q \vee r$			MP 2, 4
6.	q πρ. υπ.		r πρ. υπ.	
7.	r MP 3, 6			
8.	r $\vee$ e 5, 6-7			
9.	$\neg p \to r$			$\to$ i 4-8
10.	$s \wedge \neg t$			MP 1, 9
11.	$\neg t$			$\wedge$ e_2

(β) $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$

1.	$q \vee \neg q$	LEM
2.	q	υπόθεση
3.	p	υπόθεση
4.	q	copy 2
5.	$p \to q$	$\to_i$ 3-4
6.	$(p \to q) \vee (q \to r)$	$\vee_i$ 5
7.	$\neg q$	υπόθεση
8.	q	υπόθεση
9.	$\perp$	$\neg_e$ 8, 7
10.	r	$\perp_e$ 9
11.	$q \to r$	$\to$ i 8-10
12.	$(p \to q) \vee (q \to r)$	$\vee_i$ 11
13.	$(p \to q) \vee (q \to r)$	$\vee_e$ 1, 2-6, 7-12

(γ) $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$

1.	$p \vee q$	προϋπόθεση
2.	$\neg q \vee r$	προϋπόθεση
3.	$\neg q$	υπόθεση
4.	$p \vee q$	copy 1
5.	p	υπόθεση
6.	$p \vee r$	$\vee_i$ 5
7.	q	υπόθεση
8.	$\perp$	$\neg_e$ 7, 3
9.	$p \vee r$	$\perp_e$ 8
10.	$p \vee r$	$\vee_e$ 4, 5-6, 7-9
11.	r	υπόθεση
12.	$p \vee r$	$\vee_i$ 11
13.	$p \vee r$	$\vee_e$ 2, 3-10, 11-12

(δ) $\vdash ((p \lor q) \to r) \to ((p \to r) \land (\neg r \to \neg q))$

1.	$(p \lor q) \to r$	πρ. υπόθεση
2.	p	πρ. υπόθεση
3.	$p \lor q$	$\lor$ i 2
4.	r	MP 1, 3
5.	$p \to r$	$\to$ i 2-4
6.	$\neg r$	πρ. υπόθεση
7.	q	πρ. υπόθεση
8.	$p \lor q$	$\lor$ i 7
9.	r	MP 1, 3
10.	$\bot$	$\neg$ e 6,9
11.	$\neg q$	$\neg$i 7-10
12.	$\neg r \to \neg q$	$\to$ i 6-11
13.	$((p \to r) \land (\neg r \to \neg q))$	$\land$ 5, 12
14.	$((p \lor q) \to r) \to ((p \to r) \land (\neg r \to \neg q))$	$\to$ i 1-13

(ε) $p \to (q \to r), q, r \to t, (p \to t) \to (q \to s) \vdash s$

1.	$p \to (q \to r)$	προϋπόθεση
2.	q	προϋπόθεση
3.	$r \to t$	προϋπόθεση
4.	$(p \to t) \to (q \to s)$	προϋπόθεση
5.	p	πρ. υπόθεση
6.	$q \to r$	MP 1, 5
7.	r	MP 6, 2
8.	t	MP 3, 7
9.	$p \to t$	$\to$ i 5-8
10.	$q \to s$	MP 4, 9
11.	s	MP 10, 2

Άσκηση 3

Το σύνολο τελεστών Σ = $\{\neg,\lor,\land,\to\}$ συχνά συσχετίζεται με τον Προτασιακό Λογισμό λόγω του ότι είναι σε θέση να περιγράψει με φυσικό τρόπο διάφορους συλλογισμούς. Εντούτοις, η ύπαρξη όλων των τελεστών του Σ δεν είναι απαραίτητη για την εκφραστικότητα του Προτασιακού Λογισμού: είναι δυνατό να αφαιρέσουμε κάποιους τελεστές ή ακόμα και να τους αντικαταστήσουμε από άλλους, χωρίς να επηρεάσουμε τη δύναμη της γλώσσας. Μια χρήσιμη έννοια για να αξιολογούμε αν ένα σύνολο από τελεστές είναι ισοδύναμο με το Σ είναι η έννοια της *επάρκειας*. Συγκεκριμένα, ένα σύνολο από τελεστές *C* του Προτασιακού Λογισμού είναι *επαρκές* αν για κάθε πρόταση ϕ που χρησιμοποιεί τελεστές από το σύνολο Σ υπάρχει ισοδύναμη πρόταση ψ όπου η ψ χρησιμοποιεί μόνο τελεστές από το σύνολο C. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{\neg, \lor\}$ είναι επαρκές αφού κάθε εμφάνιση των τελεστών $\to$ και $\land$ μπορεί να αντικατασταθεί μέσω των ισοδυναμιών

$$\phi \to \psi \equiv \neg \phi \lor \psi$$
$$\phi \land \psi \equiv \neg (\neg\phi \lor \neg \psi)$$

(α) Να δείξετε ότι το σύνολο {false, ≥} είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών, όπου ο τελεστής ≥ ορίζεται από τον πιο κάτω πίνακα αλήθειας.

p	*q*	*p ≥ q*
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

Λύση:

Για να δείξουμε ότι το σύνολο τελεστών { false, ≥ } είναι επαρκές αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές $\neg$ και $\vee$ μπορούν να αντικατασταθούν μέσω ισοδύναμων προτάσεων που χρησιμοποιούν μόνο τελεστές από το σύνολο.

Οι ζητούμενες ισοδυναμίες είναι:

1. $\neg p \equiv \text{false} \geq p$
2. $p \vee q \equiv p \geq \neg q$

Ισοδυναμία 1:

false	**p**	**false ≥ p**
F	T	**F**
F	F	**T**

Ισοδυναμία 2:

p	**q**	**¬ q**	**p ≥ ¬q**
T	T	F	**T**
T	F	T	**T**
F	T	F	**T**
F	F	T	**F**

(β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο { ≥ } δεν είναι ένα επαρκές σύνολο τελεστών.

Λύση:

Θα αποδείξουμε ότι είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε τον τελεστή $\neg$ χρησιμοποιώντας τον τελεστή ≥. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε πρόταση ϕ που περιέχει μια ατομική πρόταση p και τον τελεστή ≥ είναι τέτοια ώστε αν [[p]] = T τότε [[ϕ]] = T. Επομένως $\phi \neq \neg p$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον αριθμό των τελεστών της πρότασης ϕ.

Βάση της Επαγωγής:

Αν ο αριθμός των τελεστών της ϕ είναι 0, τότε $\phi = p$ και προφανώς $\phi \neq \neg p$.

Υπόθεση της Επαγωγής:

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε πρόταση με λιγότερους από k τελεστές.

Βήμα της Επαγωγής:

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ϕ έχει ακριβώς k τελεστές Τότε $\phi = \phi_1 \geq \phi_2$ όπου οι προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουν λιγότερους από k τελεστές. Επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, για [[p]] = T, [[ϕ_1]] = T και [[ϕ_2]] = T. Συνεπώς, [[ϕ]] = T≥T = T.
Το ζητούμενο έπεται.

Άσκηση 4

Θεωρήστε τον τελεστή p ≥ q ο οποίος ορίζεται όπως στην Άσκηση 3. Να προτείνετε κανόνες εισαγωγής και απαλοιφής του τελεστή αυτού και να τους χρησιμοποιήσετε για να αποδείξετε το πιο κάτω επακόλουθο.

$$\mathbf{p \geq q \wedge q \geq r,\ r \geq s \vdash (\neg u \geq \neg s) \rightarrow (p \geq u)}$$

Λύση:

Κανόνας εισαγωγής:

$$\frac{\begin{bmatrix} q \\ \vdots \\ p \end{bmatrix}}{p \geq q} \geq \mathrm{i}$$

Κανόνες απαλοιφής:

$$\frac{p \geq q, \neg p}{\neg q} \geq \mathrm{e}_1 \qquad\qquad \frac{p \geq q, q}{p} \geq \mathrm{e}_2$$

Ακολουθεί η απόδειξη του ζητούμενου επακόλουθου:

1.	$p \geq q \wedge q \geq r$	προϋπόθεση
2.	$r \geq s$	προϋπόθεση
3.	$\neg u \geq \neg s$	προσωρινή υπόθεση
4.	u	προσωρινή υπόθεση
5.	$\neg\neg u$	$\neg\neg$i 4
6.	$\neg\neg s$	$\geq \mathrm{e}_1$ 3, 5
7.	s	$\neg\neg$e 6
8.	r	$\geq \mathrm{e}_2$ 2, 7
9.	$q \geq r$	$\wedge \mathrm{e}_2$ 1
10.	q	$\geq \mathrm{e}_2$ 9, 8
11.	$p \geq q$	$\wedge \mathrm{e}_1$ 1
12.	p	$\geq \mathrm{e}_2$ 11, 10
13.	$p \geq u$	$\geq$ i 4-12
14.	$(\neg u \geq \neg s) \rightarrow (p \geq u)$	$\rightarrow$ i 2-14

Άσκηση 5

(α) Ένα σύνολο προτάσεων του Προτασιακού Λογισμού Φ είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει ανάθεση λογικών τιμών στις ατομικές προτάσεις που αναφέρονται στο Φ η οποία να κάνει όλες τις προτάσεις της Φ ταυτόχρονα αληθείς. Να αποφασίσετε ποια από τα πιο κάτω σύνολα προτάσεων είναι ικανοποιήσιμα και ποια όχι.

(i) $\{ p \rightarrow q, \neg q \}$

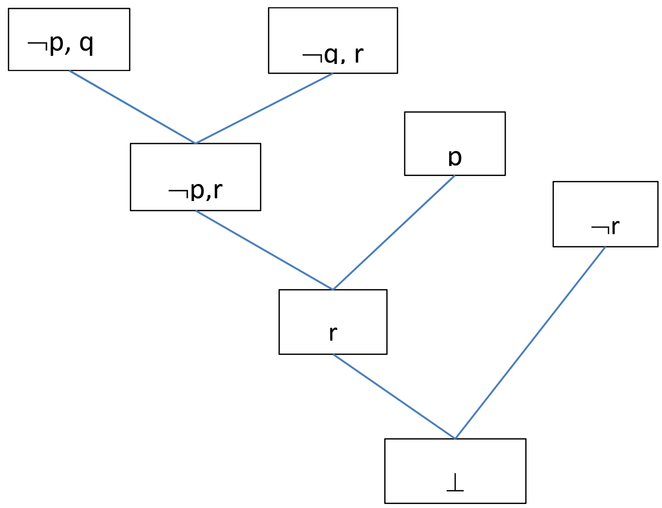
(ii) $\{ p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r \}$

(iii) $\{ (p \vee q) \rightarrow r, \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \}$

Λύση:

(i) Το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο για ανάθεση των πιο κάτω λογικών τιμών στις μεταβλητές: [[p]]=[[q]] = F

(ii) Το σύνολο δεν είναι ικανοποιήσιμο. Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο της Επίλυσης παίρνουμε το προτασιακό σύνολο { {¬p, q}, {¬q, r}, {p }, {¬r}} και έχουμε ότι:



Αφού φθάσαμε σε διάψευση, το σύνολο δεν είναι ικανοποιήσιμο. (Σημείωση: Η άσκηση θα μπορούσε να λυθεί και με πίνακες αλήθειας.)

(iii) Το σύνολο δεν είναι ικανοποιήσιμο. Η απόδειξη (η οποία μπορεί να γίνει είτε με τη Μέθοδο της Επίλυσης είτε με πίνακες αλήθειας) παραλείπεται.

(β) Να αποφασίσετε ποια από τα πιο κάτω είναι αληθή αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

(i) Αν Γ ├ φ και Γ, φ ├ ψ, τότε Γ ├ ψ.
(ii) Αν Γ ├ φ και Γ, ψ ├ φ, τότε Γ ├ ψ.
(iii) Αν Γ, φ ├ χ και Γ, ψ ├ χ, τότε Γ, φ ∧ ψ ├ χ
(iv) Αν Γ, φ ├ χ και Γ, ψ ├ χ, τότε Γ, φ ∨ ψ ├ χ

Λύση:

(i) Η πρόταση είναι αληθής: θεωρούμε την απόδειξη του φ από το Γ και στη συνέχεια τοποθετούμε την απόδειξη του ψ, όπως αυτή προκύπτει από το Γ, φ ├ ψ. Αυτό μας δίνει την απόδειξη του ψ από το σύνολο προυποθέσεων Γ και το ζητούμενο έπεται.

(ii) Η πρόταση είναι ψευδής. Ως αντιπαράδειγμα επιλέγουμε Γ = {p}, φ=p∨q και ψ = q. Αν και p ├ p∨q και p, q ├ p∨q, δεν ισχύει ότι p ├ q.

(iii) Η πρόταση είναι αληθής. Θεωρούμε την απόδειξη Γ, φ ├ χ. Ας υποθέσουμε ότι έχει τη μορφή

Γ　　προϋποθέσεις
φ　　προϋπόθεση
$\boxed{K}$
χ

όπου το Κ είναι ένα κουτί το οποίο κάνει αναφορές μόνο σε γραμμές εντός του κουτιού και στις προϋποθέσεις Γ και φ.

Τότε η απόδειξη Γ, $\phi \wedge \psi \vdash \chi$ προκύπτει ως

Γ	προϋποθέσεις
$\phi \wedge \psi$	προϋπόθεση
ϕ	$\wedge$ e
Κ	
Χ	

(iv) Η πρόταση είναι αληθής. Θεωρούμε την απόδειξη Γ, $\phi \vdash \chi$. Ας υποθέσουμε ότι έχει τη μορφή

Γ	προϋποθέσεις
ϕ	προϋπόθεση
Κ1	
Χ	

όπου το Κ1 είναι ένα κουτί το οποίο κάνει αναφορές μόνο σε γραμμές εντός του κουτιού και στις προυποθέσεις Γ και φ.

Παρόμοια, θεωρούμε την απόδειξη Γ, $\psi \vdash \chi$. Ας υποθέσουμε ότι έχει τη μορφή

Γ	προϋποθέσεις
ψ	προϋπόθεση
Κ2	
Χ	

όπου το Κ2 είναι ένα κουτί το οποίο κάνει αναφορές μόνο σε γραμμές εντός του κουτιού και στις προυποθέσεις Γ και ψ.

Τότε η απόδειξη Γ, $\phi \vee \psi \vdash \chi$ προκύπτει συνδυάζοντας τις δύο αποδείξεις ως εξής:

Γ	προϋποθέσεις		
$\phi \vee \psi$	προϋπόθεση		
ϕ	πρ. υπόθεση	ψ	πρ. υπόθεση
Κ1		Κ2	
χ		χ	
χ	$\vee$ e		