Φροντιστήριο 4 – Σκελετοί Λύσεων

1. Έστω Π(n) ο αριθμός των null δεικτών ενός δυαδικού δέντρου με n κόμβους. Θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση

   $\Pi(n) \equiv n + 1$

   Η απόδειξη μπορεί να γίνει με μαθηματική επαγωγή.

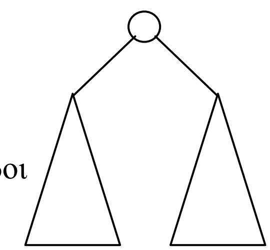
   <u>Βάση της επαγωγής:</u> $n = 0$

   Το δένδρο αποτελείται από ένα NULL δείκτη και το ζητούμενο έπεται.

   <u>Υπόθεση της επαγωγής:</u> Έστω ότι κάθε δυαδικό δένδρο με k κόμβους, $k < m$, έχει $k+1$ NULL δείκτες, δηλαδή $\Pi(k) = k+1$

   <u>Βήμα της επαγωγής:</u>

   Θα δείξουμε Π(m). Έστω δυαδικό δένδρο με m κόμβους. Το δένδρο αυτό αποτελείται από μια ρίζα και δύο υπόδενδρα με m_1 και m_2 κόμβους αντίστοιχα.

   Από τα πιο πάνω μπορούμε να πούμε ότι

   $m_1 + m_2 + 1 = m$

   Ο αριθμός NULL δεικτών του δένδρου είναι ίσος με το άθροισμα των NULL δεικτών των δύο υποδέντρων, δηλαδή

   $\Pi(m) = \Pi(m_1) + \Pi(m_2)$

   $= (m_1 + 1) + (m_2 + 1)$ {από την υπόθεση της επαγωγής και αφού m1, m2 < m}

   $= (m_1 + m_2 + 1) + 1$

   $= m + 1$

   Το ζητούμενο έπεται.

2. Έστω K(h), Φ(h) και E(h) οι αριθμοί των κόμβων, φύλλων και εσωτερικών κόμβων, αντίστοιχα, ενός δυαδικού τέλειου δένδρου ύψους h. Θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση

   $$\Pi(k) \equiv K(h)= 2^{h+1} - 1 \text{ και } \Phi(h) = 2^{h} \text{ και } E(h) = 2^{h} - 1$$

   Η απόδειξη μπορεί να γίνει με μαθηματική επαγωγή.

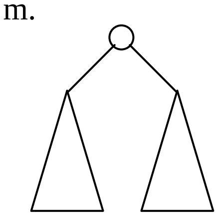
   <u>Βασική περίπτωση – h=0</u>

   Προφανώς η περίπτωση αυτή αφορά το δένδρο με ένα μόνο κόμβο, ο οποίος είναι και φύλλο. Τότε

   $$K(0) = 1 = 2^{0+1} - 1, \quad \Phi(0) = 1 = 2^{0} \quad \text{και } E(h) = 0 = 2^{0} - 1,$$

   και το ζητούμενο έπεται.

   <u>Υπόθεση της επαγωγής:</u> Έστω Π(k) για κάθε k< m για κάποιο m.

   <u>Βήμα της επαγωγής:</u> Θα δείξουμε ότι Π(m).
   Έστω ένα τέλειο δυαδικό δένδρο ύψους m. Το δένδρο αυτό αποτελείται από μια ρίζα και δύο τέλεια υπόδενδρα ύψους m-1 που ριζώνουν σ' αυτή.

   Ο αριθμός των κόμβων του δένδρου είναι ίσος με το άθροισμα των κόμβων των δύο υποδένδρων συν τη ρίζα, δηλαδή

   $$K(m) = 2\cdot K(m-1) + 1$$

   και από την υπόθεση της επαγωγής, αφού m-1 < m,

   $$\begin{aligned} K(m) &= 2 \cdot (2^{m} - 1) + 1 \\ &= 2^{m+1} - 1 . \end{aligned}$$

   Ο αριθμός των φύλλων του δένδρου είναι ίσος με το άθροισμα των φύλλων των δύο υποδένδρων, δηλαδή

   $$\Phi(m) = 2\cdot\Phi(m-1)$$

   και από την υπόθεση της επαγωγής, αφού m-1 < m,

   $$\begin{aligned} \Phi(m) &= 2 \cdot 2^{m-1} \\ &= 2^{m} . \end{aligned}$$

   Ο αριθμός των εσωτερικών κόμβων του δένδρου είναι ίσος με το άθροισμα των εσωτερικών κόμβων των δύο υποδένδρων, συν τη ρίζα, δηλαδή

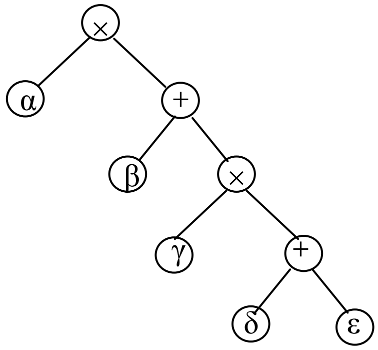
   $$E(m) = 2\cdot E(m-1) + 1$$

   και από την υπόθεση της επαγωγής, αφού m-1 < m,

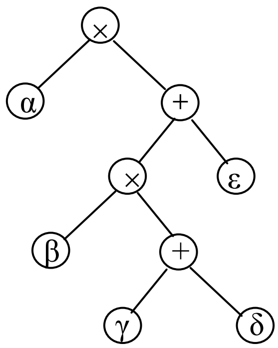
   $$\begin{aligned} E(m) &= 2 \cdot (2^{m-1} -1) + 1 \\ &= 2^{m} -1 . \end{aligned}$$

   Το ζητούμενο έπεται.

3. (a) (ι) Απεικόνιση της παράστασης $\alpha \times (\beta + \gamma\times(\delta + \varepsilon))$



(ιι) Απεικόνιση της παράστασης $\alpha \times (\beta \times (\gamma+\delta)+ \varepsilon))$



(b) Υποθέτουμε απλοποιητικά ότι το δένδρο που αντιστοιχεί την αριθμητική έκφραση δεν περιέχει λάθη και ότι οι κόμβοι του δένδρου είναι υλοποιημένοι ώς εγγραφές με τρία πεδία:

```
struct Node{
  int val;
  Node *left;
  Node *right;
}
```

όπου το πεδίο val καταγράφει το στοιχείο που είναι αποθηκευμένο στον κόμβο, το πεδίο left είναι δείκτης στο αριστερό παιδί του κόμβου και το πεδίο right είναι δείκτης στο δεξιό παιδί.

Αναδρομική διαδικασία υπολογισμού της τιμής δυαδικού δένδρου

```
int Evaluate (Node *T){
  if (*T).val = '×'
       return (Evaluate((*T).left) · Evaluate((*T).right));
  if (*T).val = '+'
      return (Evaluate((*T).left) + Evaluate((*T).right));
  else return ((*T).val);
}
```