Φροντιστήριο 2 – Σκελετοί Λύσεων

<u>Άσκηση 1</u>

Α. Παρατηρούμε ότι οι τρεις βρόγχοι είναι ανεξάρτητοι ο ένας με τον άλλο. Ο ζητούμενος χρόνος εκτέλεσης δίνεται από το γινόμενο των χρόνων εκτέλεσης του κάθε βρόγχου, δηλαδή

$$\mathrm{T}(n) = n^2 . 2n^2 \cdot n/2 \in \Theta(n^5)$$

Επίσης ο χρόνος εκτέλεσης προκύπτει από το πιο κάτω άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{2n^2}\sum_{k=1}^{n/2} 1 = \sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{2n^2} n/2 = \sum_{i=1}^{n^2} 2n^2 \cdot n/2 = \sum_{i=1}^{n^2} n^3 = n^5$$

Β. Παρατηρούμε ότι οι ο εσωτερικός βρόγχος εξαρτάται από τον εξωτερικό και ότι η αύξηση των μετρητών είναι γραμμική. Για αυτό τον λόγο μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο εκτέλεσης χρησιμοποιώντας αθροίσματα, δηλαδή

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{\lg n}\sum_{j=1}^{i^2} 1 = \sum_{i=1}^{\lg n} i^2 = \frac{\lg n(\lg n+1)(2\lg n+1)}{6} \in \Theta(\lg^3 n)$$

Γ. Παρατηρούμε ότι οι ο εσωτερικός βρόγχος εξαρτάται από το μεσαίο, αλλά η αύξηση μεσαίου μετρητή δεν είναι γραμμική. Για αυτό τον λόγο δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αθροίσματα για τον υπολογισμό του χρόνου εκτέλεσης, αλλά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πίνακα δουλεύοντας από μέσα προς τα έξω. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το n είναι δύναμη του 2.

j	1	2	…	n/4	n/2	n
T_3(j)	1	2	…	n/4	n/2	n

Ο χρόνος εκτέλεσης του μεσαίου βρόχγου είναι ίσος με το άθροισμα του χρόνου εκτέλεσης κάθε επανάληψης του εξωτερικού βρόχου, δηλαδή:

$$T_{2,3}(j) = 1 + 2 + \ldots + n/4 + n/2 + n = 2n - 1 \in \Theta(n)$$

Ο εξωτερικός βρόγχος είναι ανεξάρτητος των εσωτερικών.

$$T_{total} = n^2 . (2n-1) = \in \Theta(n^3)$$

Δ. Ο ζητούμενος χρόνος εκτέλεσης δίνεται από το πιο κάτω άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+i}\sum_{k=j}^{n}1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+i}(n-j+1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n+i}(n+1) - \sum_{j=1}^{n+i} j\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(n+1)(n+i) - \frac{(n+i)(n+i+1)}{2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2n^2+2n+2ni+2i-n^2-ni-n-in-i^2-i}{2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n^2+n+i-i^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(n^2+n) + \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^3+n^2+\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{6n^3+6n^2+3n^2+3n-2n^3-n^2-2n^2-n}{6}\right]$$

$$= \frac{4n^3+6n^2+2n}{12}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Άσκηση 2

Έστω T(n) ο χρόνος εκτέλεσης της factorial (n). (*)
Τότε η τιμή του T(n) δίνεται από την πιο κάτω αναδρομική εξίσωση

T(1) = 1 (Αν n=1 η διαδικασία κάνει δύο πράξεις, μια σύγκριση και το return: $2 \in O(1)$)

T(n) = T(n-1) + 1 (Αν n>1 η διαδικασία έχει χρόνο εκτέλεσης όσο η κλήση factorial(n-1), δηλαδή, σύμφωνα με τον ορισμό (*) T(n – 1), και δύο επιπλέον πράξεις ένα πολλαπλασιασμό και το return)

Θα λύσουμε την αναδρομική εξίσωση με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 1 \\ &= T(n-2) + 1 + 1 \\ &= T(n-2) + 2 \\ &= T(n-3) + 3 \\ &= \dots \\ &= T(n-i) + i \\ &= T(1) + (n-1) \\ &= 1 + (n-1) \\ &= n \in \Theta(n) \end{aligned}$$