
AVL-Δένδρα

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

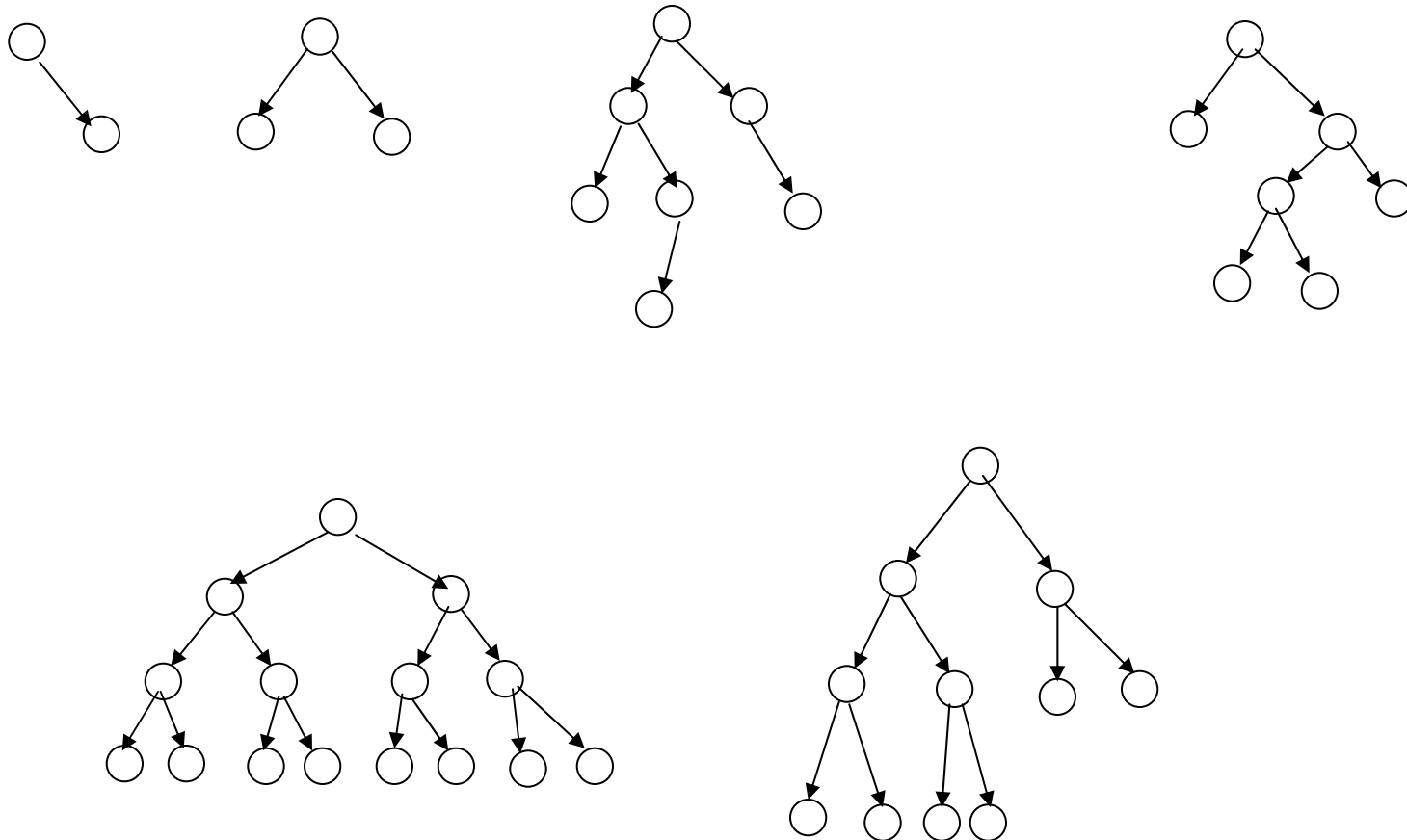
Υλοποίηση AVL-δένδρων

Εισαγωγή κόμβων και περιστροφές

AVL Δένδρα

- Είναι δυνατό να οργανώσουμε ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης έτσι ώστε το ύψος του να είναι το μικρότερο δυνατό; (τάξεως $O(\lg n)$)
- *Ιδέα:* για να έχουμε μικρό ύψος, αν u είναι ένας κόμβος του δένδρου τότε και τα δύο του υπόδενδρα έχουν περίπου τον ίδιο αριθμό κόμβων.
- *Πρώτη προσπάθεια:* για κάθε κόμβο και τα δυο του υπόδενδρα έχουν το ίδιο ύψος... \Rightarrow τέλεια δένδρα \Rightarrow δένδρα με αριθμό κόμβων $2^{h+1}-1$.
- *Δεύτερη προσπάθεια:*
Ένα δυαδικό δένδρο είναι **AVL-δένδρο** (*Adelson-Velskii and Landis*) αν για κάθε κόμβο του u τα ύψη των παιδιών του u διαφέρουν το πολύ κατά 1. (υποθέτουμε πως το κενό δένδρο έχει ύψος -1).
- Θα δούμε ότι
 1. το ύψος ενός AVL-δένδρου με n κόμβους είναι $O(\log n)$,
 2. διαδικασίες εισαγωγής και εξαγωγής κόμβων μπορούν να διατυπωθούν έτσι ώστε η AVL-συνθήκη να διατηρείται.
- Ένα πλήρες δένδρο είναι και AVL-δένδρο.

Παραδείγματα AVL- δένδρων

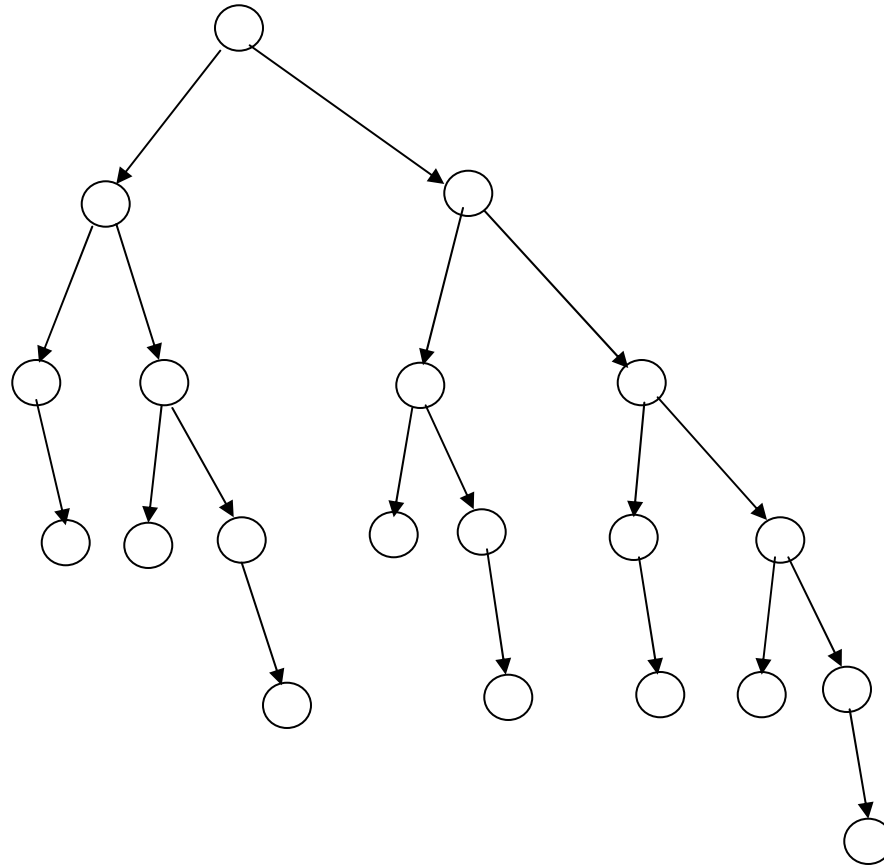


Το ύψος ενός AVL-δένδρου

- Έστω ότι $N(h)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κόμβων ενός AVL-δένδρου ύψους h .
- Έχουμε: $N(0) = 1, N(1) = 2$.
- Για $h \geq 2$, ένα AVL-δένδρο πρέπει
 - να έχει μια ρίζα,
 - ένα από τα δύο του υπόδενδρα να έχει ύψος $h-1$,
 - τα ύψη των δύο υποδένδρων να διαφέρουν, το πολύ, κατά 1.
- Άρα,
$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1$$
- Η αναδρομική σχέση θυμίζει την ακολουθία αριθμών Fibonacci.
Όπως αυτή, η N μεγαλώνει εκθετικά, δηλ. $N(h) \in \Theta(c^h)$. Επομένως:

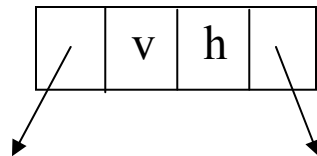
Θεώρημα: Το ύψος ενός AVL-δένδρου με n κόμβους είναι της τάξης $O(\log n)$.

(Ένα) μικρότερο AVL-δένδρο ύψους 5



Υλοποίηση AVL Δένδρων

- Η παράσταση ενός κόμβου AVL-δένδρου είναι παρόμοια με αυτή ενός κόμβου ΔΔΑ, με την προσθήκη ενός επιπλέον πεδίου, που καταγράφει το ύψος του δένδρου που ριζώνει στον συγκεκριμένο κόμβο.
- Δηλαδή, ένας κόμβος μπορεί να υλοποιηθεί ως μια εγγραφή **AVLnode** με τέσσερα πεδία.
 - **val**, όπου αποθηκεύουμε το κλειδί κόμβου,
 - **height**, τύπου int, όπου αποθηκεύουμε το ύψος του κόμβου,
 - **left**, τύπου pointer, ο οποίος δείχνει το αριστερό υπόδενδρο που ριζώνει στον συγκεκριμένο κόμβο, και
 - **right**, τύπου pointer, ο οποίος δείχνει το δεξιό υπόδενδρο που ριζώνει στον συγκεκριμένο κόμβο.



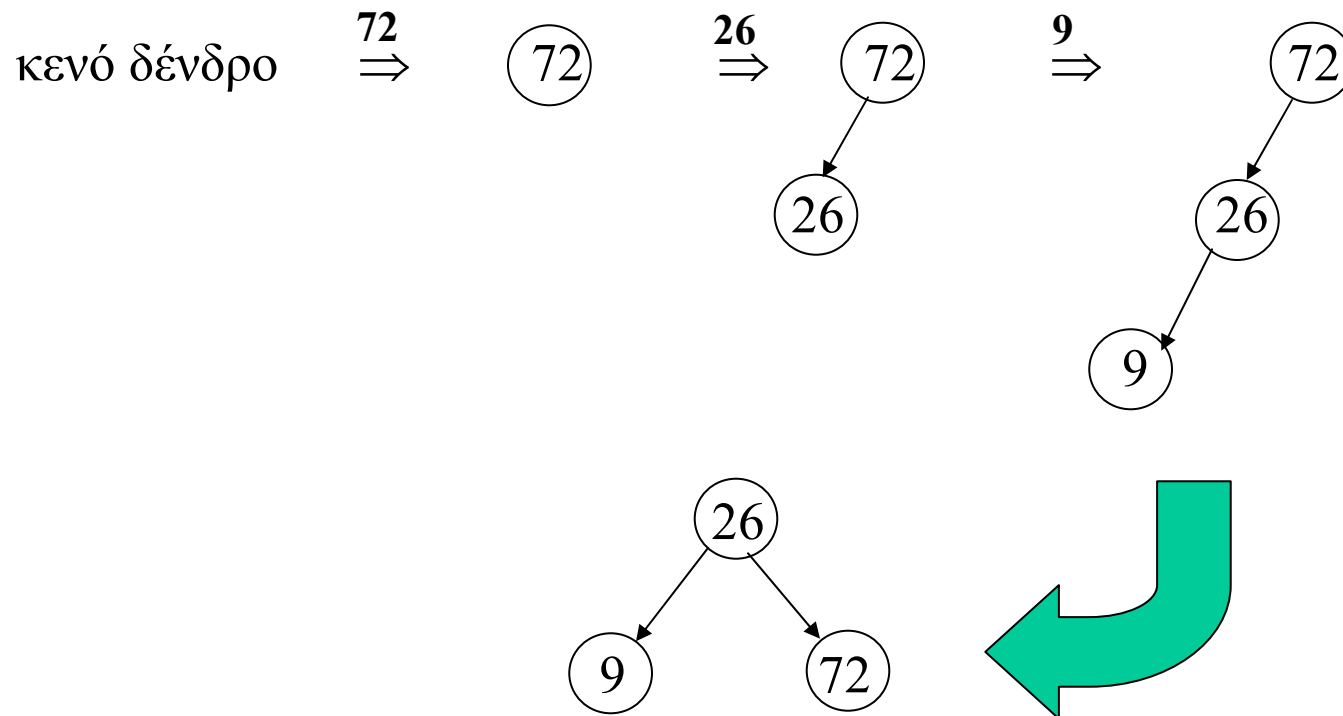
- Το πεδίο height χρησιμοποιείται για τη διακρίβωση ανισοζυγίας (με σύγκριση των ανάλογων πεδίων των παιδιών κάθε κόμβου).

Εισαγωγή κόμβου

1. Η εισαγωγή κόμβου γίνεται όπως ακριβώς και σε ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης, με τη διαφορά ότι καταγράφουμε τη διαδρομή που ακολουθείται (από τη ρίζα προς τα φύλλα).
 2. Στη συνέχεια, ακολουθούμε τη διαδρομή προς τα πίσω και δίνουμε στα πεδία height των κόμβων τις νέες τους τιμές.
 3. Αν αυτό προκαλέσει κάποια ανισοζυγία, δηλαδή, αν έχει σαν αποτέλεσμα κάποιος κόμβος να έχει παιδιά που το ύψος τους διαφέρει κατά τιμή >1 , τότε **αναπροσαρμόζουμε** τα υποδένδρα ώστε το δένδρο να γίνει ξανά AVL.
- Οι αναπροσαρμογές ονομάζονται **περιστροφές** (rotations).

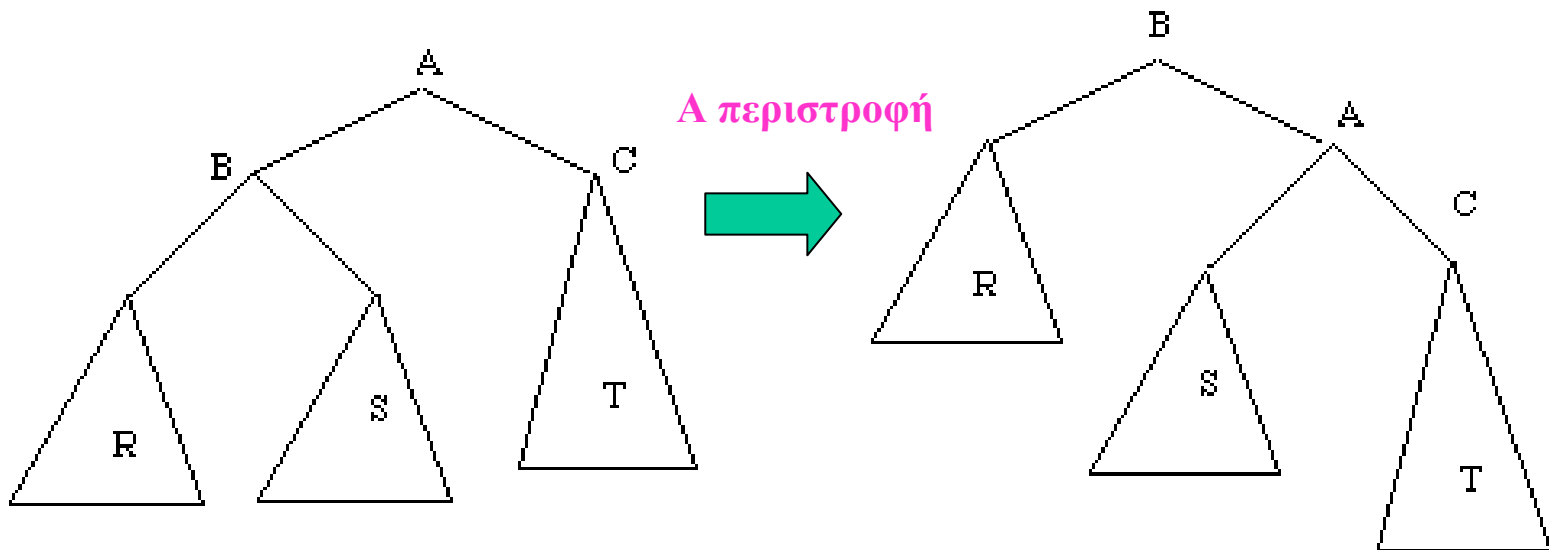
Παράδειγμα

- Εισαγωγή των 72, 26, 9, στο κένο AVL-δένδρο με αυτή τη σειρά:



Αριστερή Περιστροφή

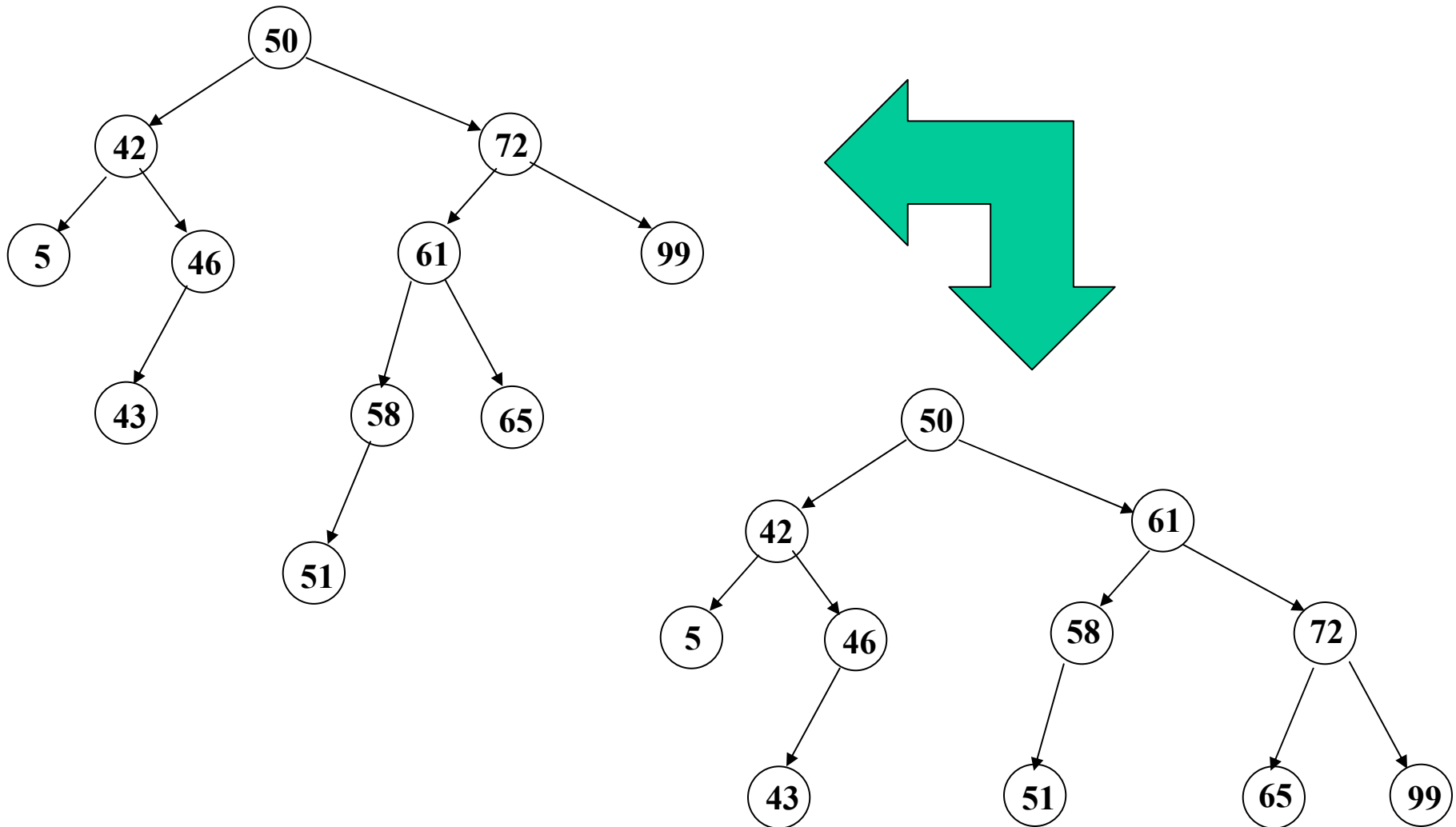
- Πριν την εισαγωγή: τα δένδρα R, S, T έχουν το ίδιο ύψος, h .
- Μετά την εισαγωγή: έστω ότι ο κόμβος εισάγεται στο δένδρο R με αποτέλεσμα το ύψος του να γίνει $h+1$.
- Η αριστερή περιστροφή υλοποιεί το εξής:



Διαδικασία Α-περιστροφής

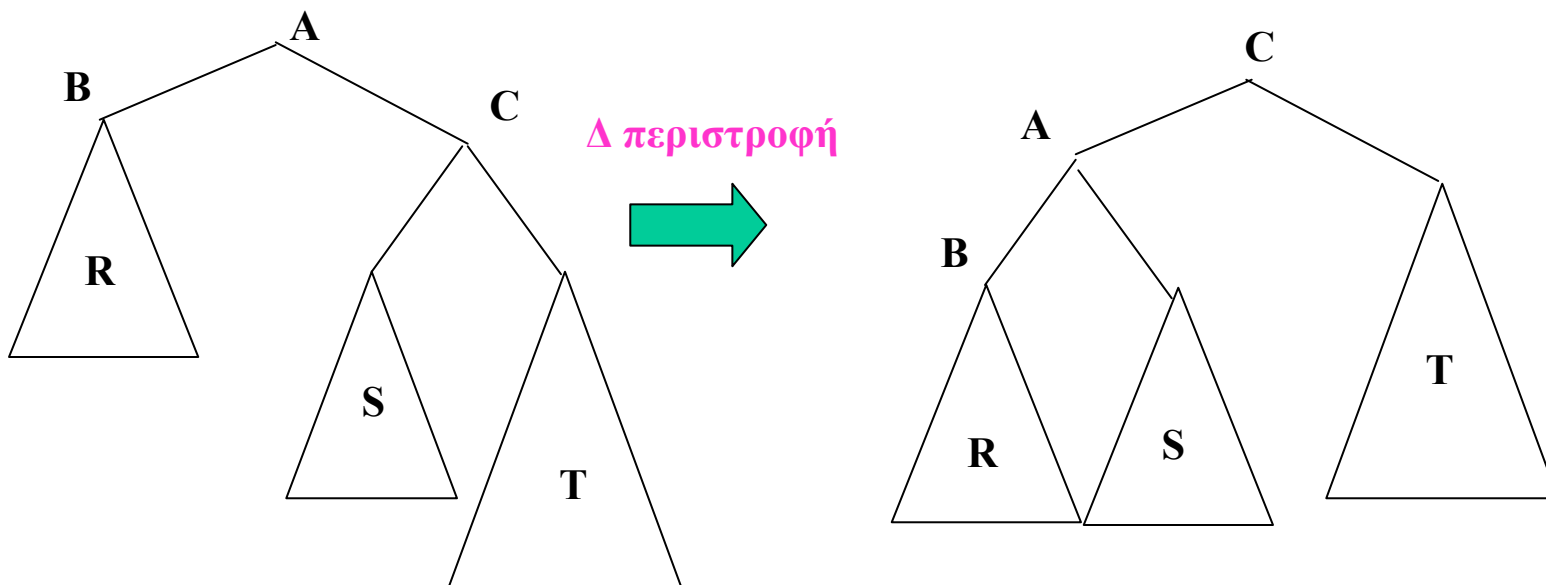
- Αριστερή περιστροφή του (A,B) σημαίνει
 1. $A.left = B.right$
 2. $B.right = A$
 3. $A.height =$
 4. $B.height =$
- Πριν την περιστροφή ο A ήταν ο πατέρας του B, και μετά, ο B είναι ο πατέρας του A.
- Το δένδρο παραμένει δυαδικό δένδρο αναζήτησης:
 - Κάθε τιμή του Y είναι μικρότερη από την τιμή του u,
 - η τιμή του u είναι μεγαλύτερη από την τιμή του v.
- Μετά την περιστροφή το δένδρο είναι AVL:
 $A.height = h + 1 = \text{ύψος του R.}$

Παράδειγμα Α-περιστροφής



Δεξιά Περιστροφή

- Συμμετρική προς την αριστερή περιστροφή.
- **Πριν την εισαγωγή:** τα δένδρα R, S, T έχουν το ίδιο ύψος, h .
Μετά την εισαγωγή: έστω ότι ο κόμβος εισάγεται στο δένδρο T με αποτέλεσμα το ύψος του να γίνει $h+1$.

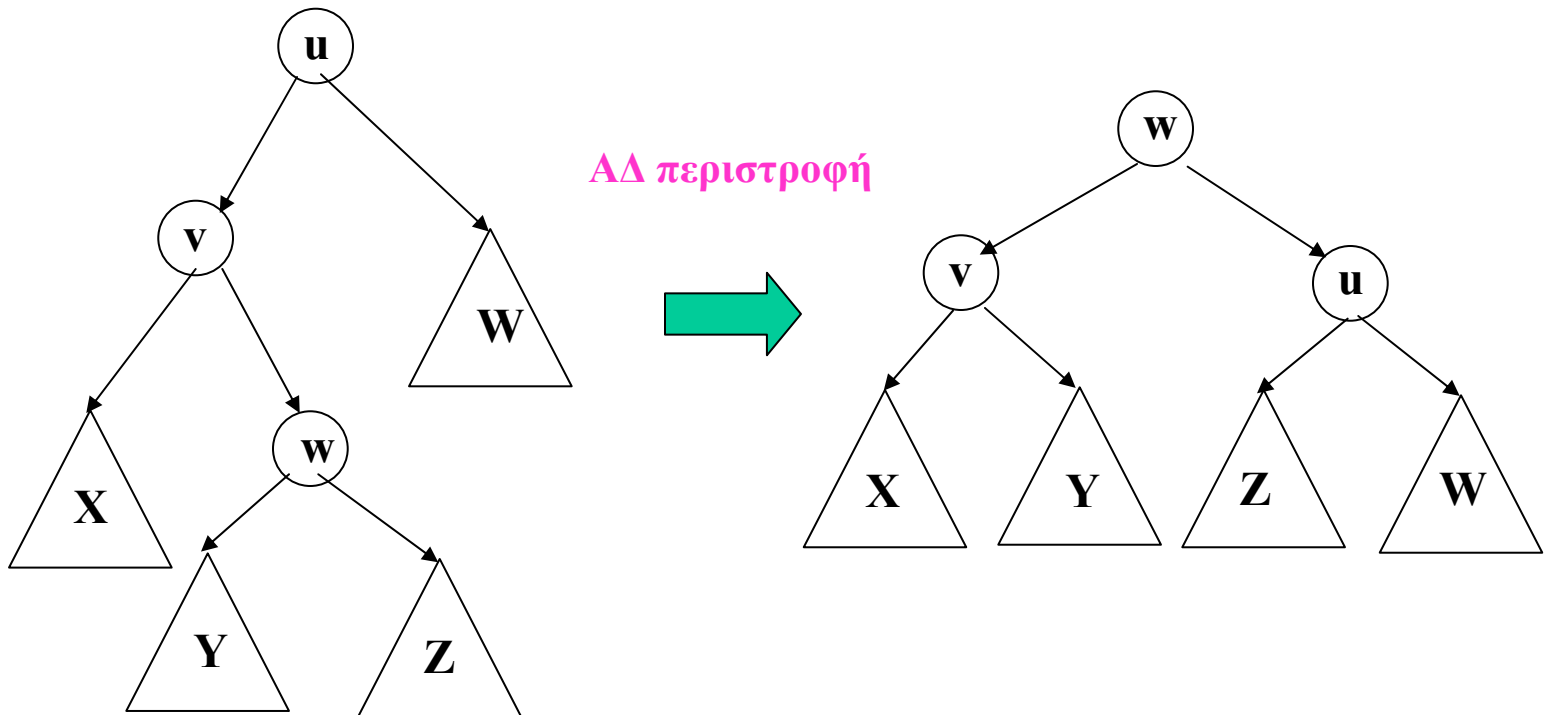


Διαδικασία Δ-περιστροφής

- Δεξιά περιστροφή του (A,C) σημαίνει
 1. $A.right = C.left$
 2. $C.left = A$
 3. $A.height =$
 4. $C.height =$
- Πριν την περιστροφή ο A ήταν ο πατέρας του C, και μετά, ο C είναι ο πατέρας του A.
- Το δένδρο παραμένει δυαδικό δένδρο αναζήτησης.

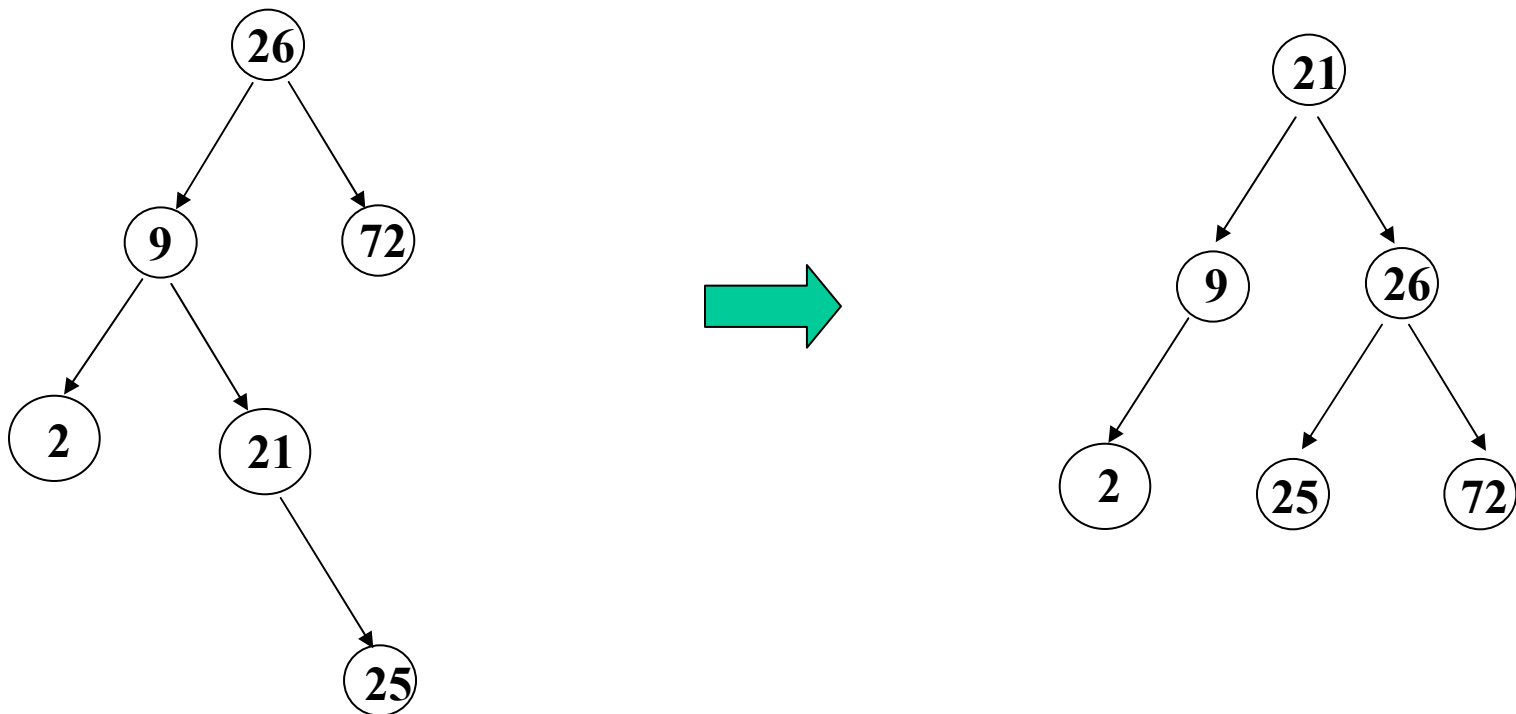
ΑΔ-Περιστροφή

- Τα δένδρα X και W έχουν ύψος h . Μετά από κάποια εισαγωγή, το w έχει ύψος $h+1$, προκαλώντας ανισοζυγία στο u .



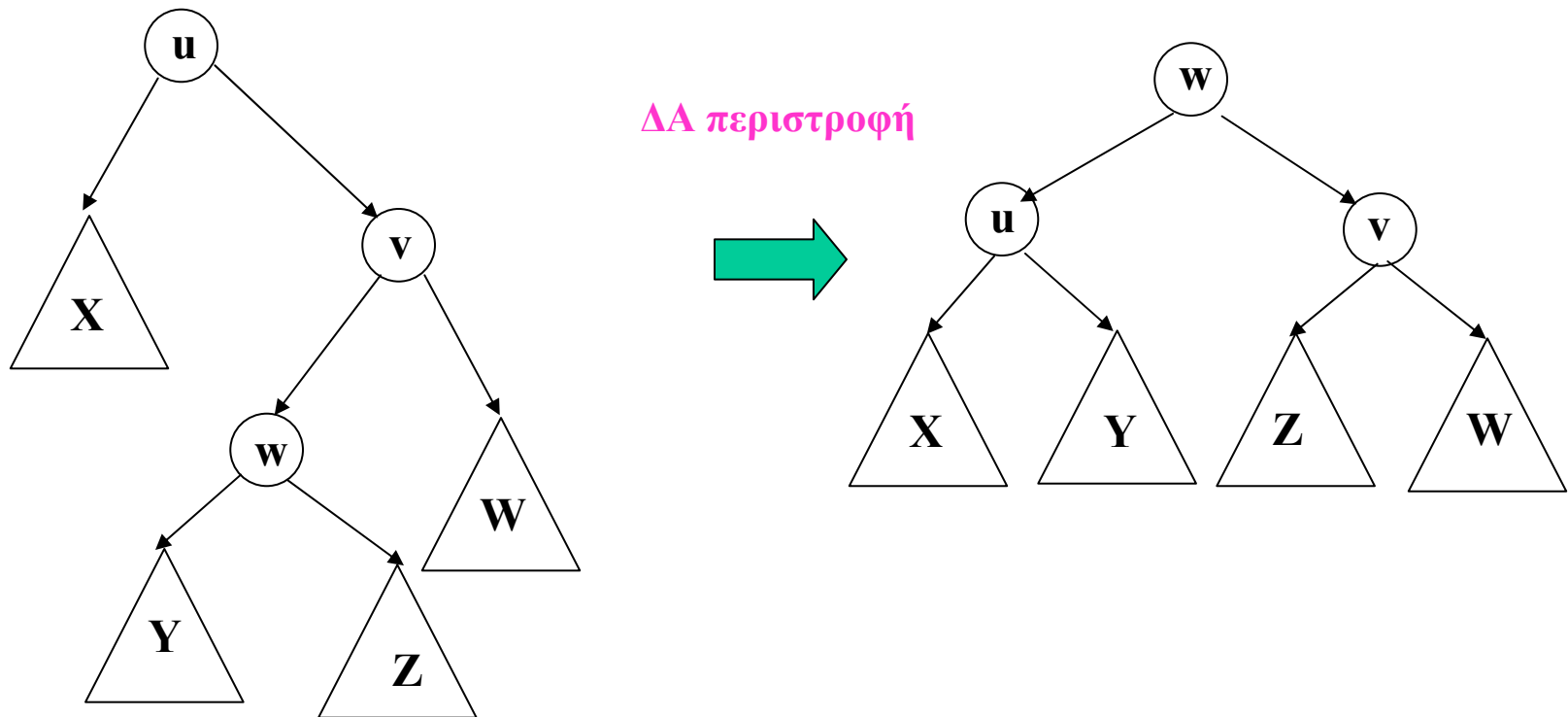
Παράδειγμα ΑΔ-περιστροφής

- Με την εισαγωγή των στοιχείων 72, 26, 9, 2, 21, 25 σε ένα AVL-δένδρο, δημιουργείται ανισοζυγία στον κόμβο 26.
- Μετά από εφαρμογή ΑΔ περιστροφής έχουμε:

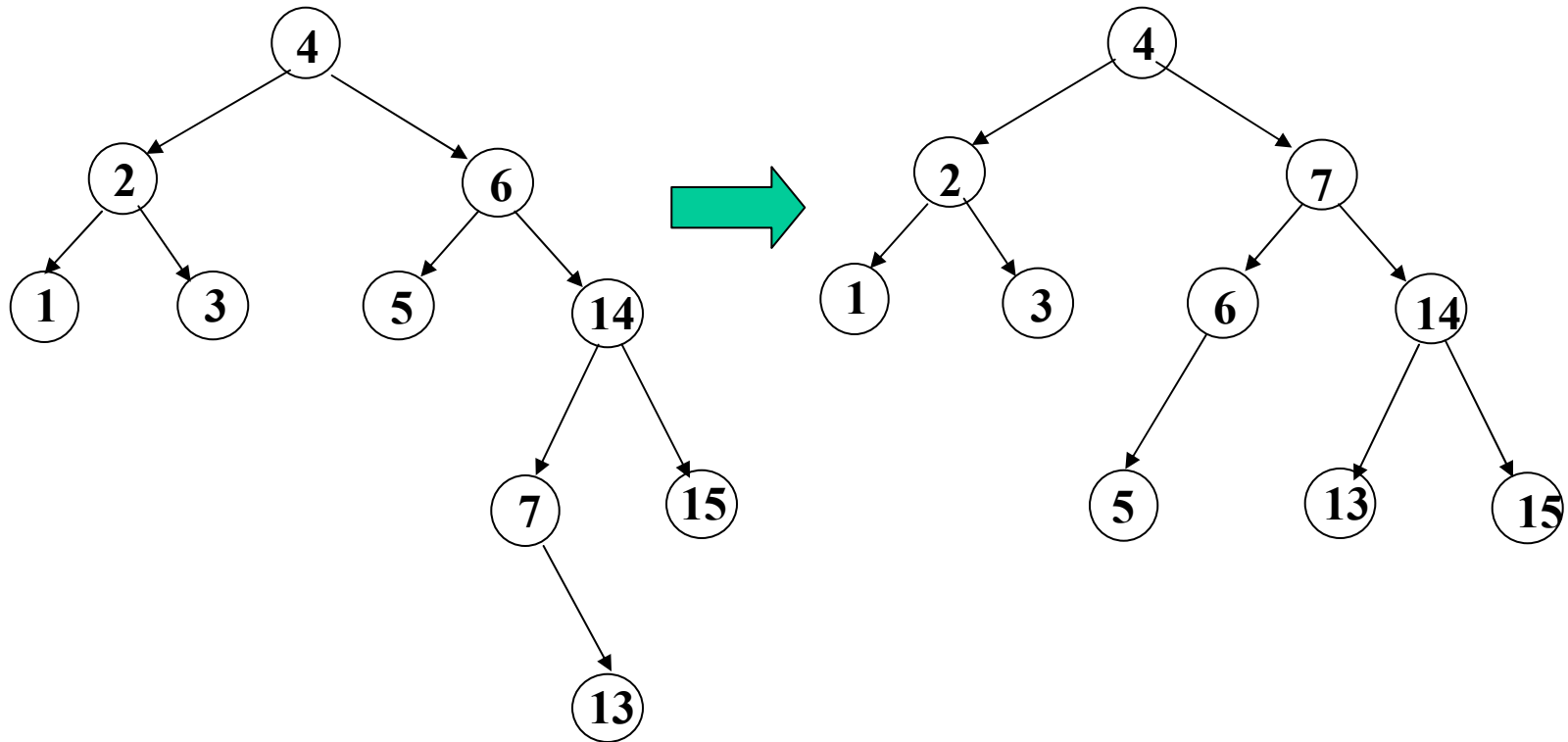


ΔΑ-Περιστροφή

- Τα δένδρα X και W έχουν ύψος h. Μετά από κάποια εισαγωγή, το w έχει ύψος h+1, προκαλώντας ανισοζυγία στο u.



Παράδειγμα ΔΑ περιστροφής



Διαδικασίες ΑΔ και ΔΑ-περιστροφής

- ΑΔ περιστροφή του (u,v,w) υλοποιείται ως εξής:
 1. $v.right = w.left$,
 2. $u.left = w.right$,
 3. $w.left = v$,
 4. $w.right = u$,
 5. $v.height, u.height, w.height = \dots$
- ΔΑ περιστροφή του (u,v,w) υλοποιείται ως εξής:
 1. $v.left = w.right$,
 2. $u.right = w.left$,
 3. $w.left = u$,
 4. $w.right = v$, και
 5. $v.height, u.height, w.height = \dots$
- Η περιστροφές δεν παραβιάζουν τη ΔΔΑ συνθήκη.
- Το δένδρο που δημιουργείται είναι AVL-δένδρο (οι κόμβοι v και u έχουν ύψος $h+1$).

Εφαρμογή περιστροφών

Όπως έχουμε περιγράψει η διαδικασία εισαγωγής κόμβου σε AVL-δένδρο γίνεται ως εξής:

1. Εισάγουμε το στοιχείο στο κατάλληλο φύλλο όπως ακριβώς σε ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης. Καταγράφουμε τη διαδρομή που ακολουθήσαμε, δηλαδή αν r είναι η ρίζα και u είναι το φύλλο που προσθέσαμε τότε παίρνουμε διαδρομή με μορφή:

$$u = v_1, v_2, \dots, v_k = r$$

2. Ακολουθούμε τη διαδρομή προς τα πίσω και δίνουμε στα πεδία height των κόμβων τις νέες τους τιμές.
3. Αν σε κάποιο σημείο αυτό προκαλέσει ανισοζυγία και μόλις συμβεί αυτό, (δηλ. αν έχει σαν αποτέλεσμα κάποιοι κόμβοι να έχουν παιδιά που το ύψος τους διαφέρει κατά τιμή >1), τότε εφαρμόζουμε στον κόμβο αυτό, έστω v_i , την κατάλληλη περιστροφή. Επιλέγουμε την περιστροφή ως εξής:

Εφαρμογή περιστροφών

- (i) αν ο v_{i-1} είναι αριστερό παιδί του v_i και ο v_{i-2} αριστερό παιδί του v_{i-1} τότε εφαρμόζουμε την Α-περιστροφή,
 - (ii) αν ο v_{i-1} είναι δεξιό παιδί του v_i και ο v_{i-2} δεξιό παιδί του v_{i-1} τότε εφαρμόζουμε τη Δ-περιστροφή,
 - (iii) αν ο v_{i-1} είναι αριστερό παιδί του v_i και ο v_{i-2} δεξιό παιδί του v_{i-1} τότε εφαρμόζουμε την ΑΔ-περιστροφή,
 - (iv) αν ο v_{i-1} είναι δεξιό παιδί του v_i και ο v_{i-2} αριστερό παιδί του v_{i-1} τότε εφαρμόζουμε τη ΔΑ-περιστροφή.
4. Ενημερώνουμε τον πατέρα του v_i για το ποιο είναι το παιδί του ως αποτέλεσμα της περιστροφής, ή, αν ο v_i είναι η ρίζα του δένδρου, ενημερώνουμε την καλούσα συνάρτηση για τη νέα ρίζα.

Προσέξτε:

1. Η περιστροφή εφαρμόζεται στον πιο χαμηλό κόμβο που παρουσιάζει ανισοζυγία.
2. Ένα AVL-δένδρο είναι ΔΔΑ!