Λύσεις Ενδιάμεσης Εξέτασης

1. Έχουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ των δύο $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων $\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}$. Μία παραλλαγή του αλγορίθμου του Strassen βασίζεται σε διαφορετικές αλγεβρικές ταυτότητες και έχει ως εξής:

(α) Κάνε πρώτα τους εξής υπολογισμούς:

i. $s_1 := G + H$
ii. $s_2 := s_1 - E$
iii. $s_3 := E - G$
iv. $s_4 := F - s_2$
v. $s_5 := J - I$
vi. $s_6 := L - s_5$
vii. $s_7 := L - J$
viii. $s_8 := s_6 - K$

(β) Συνέχισε υπολογίζοντας αναδρομικά:

i. $m_1 := s_2 \cdot s_6$
ii. $m_2 := E \cdot I$
iii. $m_3 := F \cdot K$
iv. $m_4 := s_3 \cdot s_7$
v. $m_5 := s_1 \cdot s_5$
vi. $m_6 := s_4 \cdot L$
vii. $m_7 := H \cdot s_8$

(γ) Συνέχισε υπολογίζοντας:

i. $t_1 := m_1 + m_2$
ii. $t_2 := t_1 + m_4$

(δ) Τέλος, επίστρεψε σαν έξοδο:

i. $A := m_2 + m_3$
ii. $B := t_1 + m_5 + m_6$
iii. $C := t_2 - m_7$
iv. $D := t_2 + m_5$

(α) $\boxed{\text{Δείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι πράγματι ορθός — δηλαδή, δείξτε ότι } (i)\ A = E\cdot I + F\cdot K,\ (ii)\ B = E\cdot J + F\cdot L,\ (iii)\ C = G\cdot I + H\cdot K, \text{ και } (iv)\ D = G\cdot J + H\cdot L.}$

Λύση: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= m_2 + m_3 \\ &= E\cdot I + F\cdot K\,, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} B &= t_1 + m_5 + m_6 \\ &= m_1 + m_2 + m_5 + m_6 \\ &= s_2\cdot s_6 + E\cdot I + s_1\cdot s_5 + s_4\cdot L \\ &= (s_1 - E)\cdot(L - s_5) + E\cdot I + (G+H)\cdot(J-I) + (F - s_2)\cdot L \\ &= (G+H-E)\cdot(L-J+I) + E\cdot I + (G+H)\cdot(J-I) + (F-(s_1-E))\cdot L \\ &= (G+H-E)\cdot(L-J+I) + E\cdot I + (G+H)\cdot(J-I) + (F-G-H+E))\cdot L \\ &= G\cdot L - G\cdot J + G\cdot I + H\cdot L - H\cdot J + H\cdot I - E\cdot L + E\cdot J - E\cdot I + E\cdot I \\ &\quad + G\cdot J - G\cdot I + H\cdot J - H\cdot I + F\cdot L - G\cdot L - H\cdot L + E\cdot L \\ &= E\cdot J + F\cdot L\,, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} C &= t_2 - m_7 \\ &= t_1 + m_4 - m_7 \\ &= m_1 + m_2 + m_4 - m_7 \\ &= s_2\cdot s_6 + E\cdot I + s_3\cdot s_7 - H\cdot s_8 \\ &= (s_1 - E)\cdot(L - s_5) + E\cdot I + (E-G)\cdot(L-J) - H\cdot(s_6 - K) \\ &= (G+H-E)\cdot(L-(J-I)) + E\cdot I + (E-G)\cdot(L-J) - H\cdot(L - s_5 - K) \\ &= (G+H-E)\cdot(L-J+I) + E\cdot I + (E-G)\cdot(L-J) - H\cdot(L-(J-I)-K) \\ &= G\cdot L - G\cdot J + G\cdot I + H\cdot L - H\cdot J + H\cdot I - E\cdot L + E\cdot J - E\cdot I + E\cdot I \\ &\quad + E\cdot L - E\cdot J - G\cdot L + G\cdot J - H\cdot L + H\cdot J - H\cdot I + H\cdot K \\ &= G\cdot I + H\cdot K\,, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} D &= t_2 + m_5 \\ &= t_1 + m_4 + m_5 \\ &= m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \\ &= s_2\cdot s_6 + E\cdot I + s_3\cdot s_7 + s_1\cdot s_5 \\ &= (s_1 - E)\cdot(L - s_5) + E\cdot I + (E-G)\cdot(L-J) + (G+H)\cdot(J-I) \\ &= ((G+H)-E)\cdot(L-(J-I)) + E\cdot I + (E-G)\cdot(L-J) + (G+H)\cdot(J-I) \\ &= G\cdot L - G\cdot J + G\cdot I + H\cdot L - H\cdot J + H\cdot I - E\cdot L + E\cdot J - E\cdot I + E\cdot I \\ &\quad + E\cdot L - E\cdot J - G\cdot L + G\cdot J + G\cdot J - G\cdot I + H\cdot J - H\cdot I \\ &= G\cdot J + H\cdot L\,, \end{aligned}$$

όπως χρειάζεται.

(β) $\boxed{\text{Αναλύστε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου (ως συνάρτηση του } n\text{).}}$

Λύση: Έστω $\mathsf{T}(n)$ η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί επτά αναδρομικούς υπολογισμούς στο βήμα (β) για τα επτά γινομένα m_1 έως και m_7 πινάκων με διαστάσεις $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ και δεκαπέντε προσθέσεις πινάκων με διαστάσεις $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$, όπου η κάθε πρόσθεση απαιτεί $\Theta(n^2)$ προσθέσεις βαθμωτών μεγεθών. Έτσι, λαμβάνουμε την αναδρομική εξίσωση

$$\mathsf{T}(n) = 7\,\mathsf{T}\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)\,,$$

η οποία ταυτίζεται με την αναδρομική εξίσωση για τον αλγόριθμο του Strassen και έχει επομένως την ίδια λύση $\mathsf{T}(n) = \Theta(n^{\lg_2 7}) = \Theta(n^{2.81})$.

2. Ένα ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών και βαθμού n είναι ένα πολυώνυμο της μορφής

$$P(x,y) = \sum_{0 \leq i,j \leq n \ | \ i+j=n} \alpha_{ij} x^i y^j\,.$$

Όλοι οι συντελεστές α_{ij}, όπου $0 \leq i,j \leq n$ και $i+j=n$, είναι ακέραιοι. Παρουσιάστε κατάλληλο αλγόριθμο αποτίμησης του πολυωνύμου $P(x,y)$ στο αυθαίρετο σημείο (x_0, y_0). (Δηλαδή, ο αλγόριθμός σας θα υπολογίζει την τιμή $P(x_0,y_0)$.) Ο αλγόριθμός σας πρέπει να χρησιμοποιεί $\Theta(n)$ αριθμητικές πράξεις (δηλαδή, προσθέσεις, πολλαπλασιασμούς ή διαιρέσεις) στη χειρότερη περίπτωση.

Λύση: Θέτουμε $y = rx$. Τότε, λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= \sum_{0 \leq i,j \leq n \ |i+j=n} \alpha_{ij} x^i (rx)^j \\
&= \sum_{0 \leq i,j \leq n \ |i+j=n} \alpha_{ij} x^{i+j} r^j \\
&= \sum_{0 \leq j \leq n} \alpha_{(n-j).j} x^n r^j \\
&= x^n \cdot \sum_{0 \leq j \leq n} \alpha_{(n-j).j} r^j\,.
\end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση περιέχει το πολυώνυμο μίας μεταβλητής $\sum_{0 \leq j \leq n} \alpha_{(n-j).j} r^j$, το οποίο μπορεί να αποτιμηθεί με τον αλγόριθμο του Horner. Έτσι, σχηματίζουμε τον εξής αλγόριθμο:

- Υπολόγισε την τιμή $r_0 = \frac{y_0}{x_0}$.
- Υπολόγισε την τιμή x_0^n (χρησιμοποιώντας διαδοχικούς τετραγωνισμούς).
- Χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο Horner για την αποτίμηση του πολυωνύμου $\sum_{0 \leq j \leq n} \alpha_{(n-j).j} r^j$ στο σημείο $r = r_0$.
- Πολλαπλασίασε το αποτέλεσμα της αποτίμησης επί την τιμή x_0^n.

Ως γνωστό, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Horner είναι $\Theta(n)$. Ο αριθμός των τετραγωνισμών είναι $\Theta(\lg n)$ (και κάθε τετραγωνισμός είναι ένας πολλαπλασιασμός), ενώ η πολυπλοκότητα των υπολοίπων βημάτων είναι $\Theta(1)$. Έπεται ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\Theta(n)$.

3. Σε ένα διαγωνισμό τριάθλου με n διαγωνιζομένους αθλητές, κάθε διαγωνιζόμενος πρέπει να κολυμπήσει 20 γύρους σε μία πισίνα, να διασχίσει με ποδήλατο 10 μίλια και μετά να τρέξει 3 μίλια. Το σχέδιο είναι να στέλνουμε τους διαγωνιζόμενους διαδοχικά σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα ασφαλείας:

> Η πισίνα μπορεί να χρησιμοποιείται από ένα μόνο διαγωνιζόμενο ανά πάσα στιγμή.

Δηλαδή, στην αρχή ένας διαγωνιζόμενος κολυμπά τους 20 γύρους, βγαίνει από την πισίνα και αρχίζει την ποδηλασία. Μόλις ο πρώτος διαγωνιζόμενος βγει από την πισίνα, ένας δεύτερος διαγωνιζόμενος ξεκινά να κολυμπά τους 20 γύρους. Μόλις ο δεύτερος βγει από την πισίνα και αρχίσει την ποδηλασία, ένας τρίτος διαγωνιζόμενος αρχίζει την κολύμβηση, κ.ο.κ.
Κάθε διαγωνιζόμενος i, με $1 \leq i \leq n$, έχει ένα προβλεπόμενο χρόνο κολύμβησης s_i, ένα προβλεπόμενο χρόνο ποδηλασίας b_i και ένα προβλεπόμενο χρόνο τρεξίματος r_i. Ένα χρονοδιάγραμμα προσδιορίζει τη σειρά και τη χρονική στιγμή εκκίνησης των διαγωνιζομένων. Ορίζουμε τον χρόνο ολοκλήρωσης ενός χρονοδιαγράμματος ως τον μικρότερο χρόνο στον οποίο όλοι οι διαγωνιζόμενοι θα έχουν τελειώσει και τα τρία σκέλη του τριάθλου, υποθέτοντας ότι κάθε διαγωνιζόμενος θα δαπανήσει τους προβλεπομένους χρόνους κολύμβησης, ποδηλασίας και τρεξίματος.

(α) Παρουσιάαστε ένα άπληστο αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός χρονοδιαγράμματος με τον ελάχιστο δυνατό χρόνο ολοκλήρωσης.

Λύση: Παρατηρούμε ότι η κολύμβηση όλων των αθλητών στην πισίνα τελειώνει σε χρόνο που είναι ανεξάρτητος του χρονοδιαγράμματος. (Αυτός ο χρόνος δεν είναι παρά το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} s_i$ των χρόνων κολύμβησης των αθλητών.) Αφού θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο ολοκλήρωσης, είναι φυσιολογικό να θέλουμε ο τελευταίος αθλητής που θα στείλουμε για ποδηλασία και τρέξιμο να έχει το ελάχιστο δυνατό άθροισμα χρονου ποδηλασίας και χρόνου τρεξίματος $b_i + r_i$, όπου $1 \leq i \leq n$. Η αρχική αυτή παρατήρηση θα είναι η βάση για τον άπληστο αλγόριθμό μας:

Χρονοδρομολογούμε τους αθλητές κατά μη αύξον άθροισμα χρόνου ποδηλασίας και χρόνου τρεξίματος $b_i + f_i$, όπου $1 \leq i \leq n$.

(β) Χρησιμοποιείστε ένα επιχείρημα ανταλλαγής για να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμός σας υπολογίζει πράγματι ένα χρονοδιάγραμμα με τον ελάχιστο δυνατό χρόνο ολοκλήρωσης.

Έστω O το χρονοδιάγραμμα που κατασκευάζει ο άπληστος αλγόριθμος, και B το βέλτιστο χρονοδιάγραμμα (που κατασκευάζει ο βέλτιστος αλγόριθμος). Υποθέτουμε ότι τα χρονοδιαγράμματα O και B είναι διαφορετικά (αλλοιώς, το O είναι βέλτιστο και έχουμε τελειώσει). Έπεται ότι υπάρχει ζεύγος αθλητών i και j τέτοιων ώστε ο j ξεκινά πριν από τον i στο χρονοδιάγραμμα O, ενώ ο i ξεκινά πριν από τον j στο χρονοδιάγραμμα B. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι αθλητές i και j είναι διαδοχικοί στο χρονοδιάγραμμα B. (Αν όλα τα ζεύγη διαδοχικών αθλητών στο χρονοδιάγραμμα O είχαν την ίδια σειρά και στο χρονοδιάγραμμα B, τότε τα χρονοδιαγράμματα O και B θα ήταν τα ίδια και το χρονοδιάγραμμα O θα ήταν βέλτιστο.) Από τον ορισμό του απλήστου αλγορίθμου, έχουμε ότι $b_j + r_j \geq b_i + r_i$. Έστω S_i και S_j οι χρόνοι περάτωσης της κολύμβησης των αθλητών i και j, αντίστοιχα, για το χρονοδιάγραμμα B. Έστω P_i και P_j οι χρόνοι περάτωσης (μετά από την ποδηλασία και το τρέξιμο) των αθλητών i και j, αντίστοιχα, για το χρονοδιάγραμμα B. Προφανώς, $P_i = S_i + b_i + r_i$ και $P_j = S_j + b_j + r_j$.

Ανταλλάσσουμε τους αθλητές i και j στο χρονοδιάγραμμα B.

Έστω $\overline{B}$ το χρονοδιάγραμμα που προκύπτει. Παρατηρούμε ότι οι χρόνοι περάτωσης όλων των αθλητών πλην των i και j παραμένουν οι ίδιοι στο χρονοδιάγραμμα $\overline{B}$ όπως ήταν στο χρονοδιάγραμμα B. Επομένως, μας ενδιαφέρουν μόνο οι νέοι χρόνοι περάτωσης των αθλητών i και j. Έστω $\overline{P_i}$ και $\overline{P_j}$ οι χρόνοι περάτωσης (μετά από την ποδηλασία και το τρέξιμο) των αθλητών i και j, αντίστοιχα, για το χρονοδιάγραμμα $\overline{B}$. Από την κατασκευή μας, $\overline{P_i} = S_j + b_i + r_i$ και $\overline{P_j} = S_i + b_j + r_j$.

Προφανώς, ο χρόνος περάτωσης (μετά από την ποδηλασία και το τρέξιμο) του αθλητή j μειώνεται στο χρονοδιάγραμμα $\overline{B}$, ενώ ο χρόνος περάτωσης (μετά από την ποδηλασία και το τρέξιμο) του αθλητή i αυξάνεται. Έτσι, χρειάζεται μόνο να εξετάσουμε την επίδραση του νέου χρόνου περάτωσης του αθλητή i στον χρόνο ολοκλήρωσης του χρονοδιαγράμματος $\overline{B}$. Προφανώς, $\overline{P}_i = S_j + b_i + r_i \leq S_j + b_j + r_j = P_j$. Έπεται ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης του χρονοδιαγράμματος $\overline{B}$ δεν είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο ολοκλήρωσης του χρονοδιαγράμματος B. Αφού το χρονοδιάγραμμα B ήταν βέλτιστο, έπεται ότι και το χρονοδιάγραμμα $\overline{B}$ είναι βέλτιστο. Αφού το τελικό χρονοδιάγραμμα $\overline{B}$ ταυτίζεται με το άπληστο χρονοδιάγραμμα O, έπεται ότι το άπληστο χρονοδιάγραμμα O είναι βέλτιστο.

(γ) Ποιά είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (ως συνάρτηση του n);

Η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου κυριαρχείται από την ταξινόμηση των αθροισμάτων χρόνων ποδηλασίας και χρόνων τρεξίματος $b_i + r_i$ των αθλητών, όπου $1 \leq i \leq n$, και είναι $\Theta(n \lg n)$.