Λύσεις 4ης Σειράς Ασκήσεων

1. [Διασκευή του Προβλήματος 7.9 από το βιβλιο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρούμε μία περιοχή όπου συνέβει ένας μεγάλος σεισμός. Εξ αιτίας του σεισμού, υπάρχουν n τραυματίες, και ο καθένας τους πρέπει να μεταφερθεί εσπευσμένα σε ένα από τα k νοσοκομεία της περιοχής, κάτω από τους εξής περιορισμούς:

   - Ο κάθε τραυματίας μπορεί να μεταφερθεί σε ένα νοσοκομείο που απέχει μέχρι και 2 χιλιόμετρα από την τρέχουσα θέση του.
   - Για να μην δημιουργηθούν υπερφορτώσεις, το κάθε νοσοκομείο μπορεί να δεχτεί το πολύ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ τραυματίες.

   Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος θα αποφασίζει κατά πόσο ή όχι είναι δυνατή η μεταφορά των τραυματιών στα νοσοκομεία (κάτω από τους δύο περιορισμούς).

Λύση: Από τα δεδομένα του προβλήματός μας, κατασκευάζουμε ένα δίκτυο ροής $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$ ως εξής:

- Υπάρχει μία πηγή s και ένας προορισμός t.
- Για κάθε τραυματία i, όπου $1 \leq i \leq n$, υπάρχει μία κορυφή p_i. Για κάθε νοσοκομείο j, όπου $1 \leq j \leq k$, υπάρχει μία κορυφή h_j.
- Για κάθε ζευγάρι τραυματία i και νοσοκομείου j, όπου $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq k$, βάζουμε την ακμή (p_i, h_j) με χωρητικότητα 1 αν και μόνο αν το νοσοκομείο j απέχει μέχρι και 2 χιλιόμετρα από την τρέχουσα θέση του τραυματία i.
- Για κάθε τραυματία i, όπου $1 \leq i \leq n$, βάζουμε την ακμή (s, p_i) με χωρητικότητα 1.
- Για κάθε νοσοκομείο j, όπου $1 \leq j \leq k$, βάζουμε την ακμή (h_j, t) με χωρητικότητα $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$.

Παρατηρούμε ότι από την κατασκευή μας, η τιμή της μέγιστης ροής στο δίκτυο ροής G είναι το πολύ n.

Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν ανάγουν το υπολογιστικό πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε στο πρόβλημα υπολογισμού της μέγιστης ροής για το δίκτυο ροής G. Ξεκινάμε με την πρώτη:

Πρόταση 1. Υποθέτουμε ότι η μεταφορά των τραυματιών στα νοσοκομεία είναι δυνατή (κάτω από τους δύο περιορισμούς). Τότε, η τιμή της μέγιστης ροής στο δίκτυο G είναι n.

Η απόδειξη θα είναι κατασκευαστική — από μία λύση για το πρόβλημα μεταφοράς των τραυματιών στα νοσοκομεία, θα κατασκευάσουμε μία ροή για το δίκτυο ροής G με τιμή n (η οποία είναι μέγιστη).

<u>Απόδειξη.</u> Από την υπόθεσή μας, υπάρχει για κάθε τραυματία i, όπου $1 \leq i \leq n$, ένα νοσοκομείο $j(i)$ στο οποίο μεταφέρεται (ώστε οι δύο περιορισμοί του προβλήματος να ικανοποιούνται).

> Στέλνουμε ροή ίση με 1 πάνω σε κάθε μονοπάτι $s \rightsquigarrow p_i \rightsquigarrow h_{j_i} \rightsquigarrow t$, όπου $1 \leq i \leq n$. Έστω f η ροή που προκύπτει.

Έχουμε να δείξουμε ότι η διατήρηση της ροής και ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιούνται.

- Η κατασκευή της ροής f ικανοποιεί κατευθείαν την διατήρηση της ροής.
- Θα δείξουμε τώρα ότι ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιείται. Από την κατασκευή του δικτύου ροής G, η ροή σε μία ακμή του δικτύου ισούται με 1 εκτός αν η ακμή είναι της μορφής (h_j, t), όπου $1 \leq j \leq k$. Αφού όλες οι χωρητικότητες είναι τουλάχιστον 1, χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο αυτές τις ακμές. Θεωρούμε λοιπόν την ακμή (h_j, t), όπου $1 \leq j \leq k$. Από την κατασκευή μας, η ροή πάνω στην ακμή αυτή είναι ίση με την ροή η οποία μπαίνει στην κορυφή h_j. Από την κατασκευή μας, η τελευταία αυτή ροή είναι ίση με τον αριθμό των τραυματιών που μεταφέρονται στο νοσοκομείο j. Από τον περιορισμό του προβλήματος, ο αριθμός των τραυματιών που μεταφέρονται στο νοσοκομείο j είναι το πολύ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. Από την κατασκευή μας, η ακμή (h_j, t) έχει χωρητικότητα $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. Έπεται ότι ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιείται.

Έχουμε δείξει επομένως ότι η διατήρηση της ροής και ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιούνται. $\square$

Συνεχίζουμε ώστε να δείξουμε:

Πρόταση 2: Υποθέτουμε ότι η τιμή της μέγιστης ροής στο δίκτυο ροής G είναι n. Τότε, η μεταφορά των τραυματιών στα νοσοκομεία είναι δυνατή (κάτω από τους δύο περιορισμούς).

Η απόδειξη θα είναι κατασκευαστική — από μία μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής G (με τιμή n), θα κατασκευάσουμε μία λύση για το πρόβλημα μεταφοράς των τραυματιών στα νοσοκομεία.

Απόδειξη. Οπως έχουμε δείξει στο μάθημα, η υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι υπάρχει ακέραιη ροή f για το δίκτυο ροής G με τιμή $|f| = n$. Θεωρούμε οποιοδήποτε τραυματία i, όπου $1 \leq i \leq n$. Από τον περιορισμό της χωρητικότητας, η ροή σε οποιαδήποτε ακμή (p_i, h_j) (η οποία έχει χωρητικότητα 1), όπου $1 \leq j \leq k$, είναι ίση με 0 ή 1.

- Αφού η μοναδική ακμή που εισέρχεται στην κορυφή p_i είναι η ακμή (t, p_i), η οποία έχει χωρητικότητα 1, η διατήρηση της ροής συνεπάγεται ότι υπάρχει το πολύ μία ακμή (p_i, h_j) πάνω στην οποία η ροή ισούται με 1.
- Αφού $|f| = n$ και υπάρχουν n ακμές εξερχόμενες από την πηγή s, έπεται ότι η ροή στην ακμή (s, p_i) ισούται με 1. Αφού η ακμή (s, p_i) είναι η μοναδική ακμή που εισέρχεται στην κορυφή p_i, έπεται ότι υπάρχει ακριβώς μία ακμή $(p_i, h_{j(i)})$ πάνω στην οποία η ροή ισούται με 1.

Στέλνουμε τον τραυματία i στο νοσοκομείο $j(i)$.

Απομένει να δείξουμε ότι οι δύο περιορισμοί του προβλήματός μας ικανοποιούνται.

- Θεωρούμε αυθαίρετο τραυματία i, όπου $1 \leq i \leq n$. Η κατασκευή μας για την ακμή $(p_i, h_{j(i)})$ συνεπάγεται ότι το νοσοκομείο $j(i)$ απέχει μέχρι και 2 χιλιόμετρα από την τρέχουσα θέση του.
- Θεωρούμε αυθαίρετο νοσοκομείο j, όπου $1 \leq j \leq k$. Ο περιορισμός της χωρητικότητας για την ακμή (h_j, t) συνεπάγεται ότι η ροή πάνω στην ακμή (h_j, t) είναι το πολύ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. Αφού η ακμή (h_j, t) είναι η μοναδική ακμή που εξέρχεται από την κορυφή h_j, η διατήρηση της ροής για την κορυφή h_j συνεπάγεται ότι η (συνολική) ροή που μπαίνει στην κορυφή h_j είναι το πολύ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$. Από την κατασκευή μας, κάθε ακμή που εισέρχεται στην κορυφή h_j έχει χωρητικότητα 1. Έπεται ότι υπάρχουν το πολύ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ ακμές (p_i, h_j) οι οποίες εισέρχονται στην κορυφή h_j και φέρουν ροή 1. Από την κατασκευή μας, έπεται ότι ο αριθμός των τραυματιών που μεταφέρονται στο νοσοκομείο j είναι το πολύ $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$.

Έχουμε δείξει συνολικά ότι οι δύο περιορισμοί του προβλήματός μας ικανοποιούνται. □

Οι Προτάσεις 1 και 2 συνεπάγονται τον ακόλουθο αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει κατά πόσο ή όχι είναι δυνατή η μεταφορά των τραυματιών στα νοσοκομεία (κάτω από τους δύο περιορισμούς):

- Από τα δεδομένα του προβλήματος, κατασκευάζουμε το δίκτυο ροής G.
- Υπολογίζουμε την μέγιστη ροή στο δίκτυο ροής G με τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson, και ελέγχουμε αν η τιμή της ισούται με n.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου κυριαρχείται από την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Ford-Fulkerson πάνω σε ένα δίκτυο ροής με $O(kn)$ ακμές.

2. [Διασκευή του Προβλήματος 7.12 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρούμε ένα δίκτυο ροής $G = (V, E)$ με ακμές μοναδιαίας χωρητικότητας και μία (θετική) ακέραια παράμετρο k. Θέλουμε να διαγράψουμε k ακμές ώστε να μειώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής που θα προκύψει.
Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για την διαγραφή των k ακμών.

Λύση: Έστω f η τιμή της μέγιστης ροής για το δίκτυο ροής G. Από το Θεώρημα "Μέγιστη Ροή = Ελάχιστη Αποκοπή", η τιμή $|f|$ της μέγιστης ροής είναι ίση με την χωρητικότητα της ελάχιστης αποκοπής. Αφού όλες οι ακμές έχουν μοναδιαία χωρητικότητα, έπεται ότι η τιμή $|f|$ είναι ίση με το μέγεθος (= αριθμός ακμών) της ελάχιστης αποκοπής.

Παρατηρούμε ότι αν το μέγεθος της ελάχιστης αποκοπής είναι μικρότερο ή ίσο από την παράμετρο k, τότε η διαγραφή όλων των ακμών μίας ελάχιστης αποκοπής δημιουργεί ένα νέο δίκτυο ροής G' το οποίο δεν είναι συνδεδεμένο. Έπεται ότι το μέγεθος της ελάχιστης αποκοπής του δικτύου ροής G' είναι 0. Το Θεώρημα "Μέγιστη Ροή = Ελάχιστη Αποκοπή" συνεπάγεται ότι η τιμή της μέγιστης ροής στο G' είναι 0. Έτσι, ενδιαφέρουσα είναι μόνο η περίπτωση όπου το μέγεθος της ελάχιστης αποκοπής είναι μεγαλύτερο από την παράμετρο k. Για την περίπτωση αυτή, η ιδέα του αλγορίθμου είναι να διαγράψουμε k ακμές από μία ελάχιστη τομή. Θα παρουσιάσουμε πρώτα τον αλγόριθμο και μετά θα αποδείξουμε την ορθότητά του. (Θα αποδείξουμε, δηλαδή, ότι το δίκτυο ροής G' επιτυγχάνει την ελάχιστη δυνατή μέγιστη ροή.)

- Υπολογίζουμε μία μέγιστη ροή f και μία (αντίστοιχη) ελάχιστη αποκοπή (V_1, V_2) για το δίκτυο ροής G με τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson.
- Διαγράφουμε k χιαστί ακμές ως προς την αποκοπή (V_1, V_2) (οπότε λαμβάνουμε το δίκτυο ροής G').

Αφού *(ι)* η ελάχιστη δυνατή μέγιστη ροή οποιουδήποτε δικτύου ροής G' το οποίο λαμβάνεται με διαγραφή k ακμών από το δίκτυο ροής G έχει τιμή μεγαλύτερη ή ίση από το 0, και *(ιι)* η μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής G' που επιστρέφει ο αλγόριθμός μας στην περίπτωση όπου $|f| \leq k$ έχει τιμή 0, η ορθότητα του αλγορίθμου για την περίπτωση όπου $|f| \leq k$ έπεται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|f| > k$.

Παρατηρούμε ότι η αποκοπή (V_1, V_2) έχει μέγεθος $|f| - k$ για το δίκτυο ροής G' (καθώς η αποκοπή (V_1, V_2) ήταν ελάχιστη για το δίκτυο ροής G και είχε, επομένως, μέγεθος $|f|$, και το δίκτυο ροής G' προέκυψε με διαγραφή k χιαστί ακμών ως προς την αποκοπή (V_1, V_2) (για το δίκτυο ροής G)). Το Θεώρημα "Μέγιστη Ροή = Ελάχιστη Αποκοπή" συνεπάγεται ότι η μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής G' είναι μικρότερη ή ίση από $|f| - k$. Συνεχίζουμε ώστε να δείξουμε:

Πρόταση 1. Για οποιοδήποτε σύνολο ακμών $F \subseteq E$ με $|F| = k$, το δίκτυο ροής $G' = (V, E \setminus F)$ έχει μέγιστη ροή με τιμή τουλάχιστον $|f| - k$.

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε αποκοπή (V_1', V_2') για το δίκτυο ροής G'. Ο αριθμός των χιαστί ακμών ως προς την αποκοπή (V_1', V_2') για το δίκτυο ροής G είναι τουλάχιστον $|f|$ (αφού η ελάχιστη αποκοπή (V_1, V_2) έχει αριθμό χιαστί ακμών $|f|$ για το δίκτυο ροής G). Από αυτές τις χιαστί ακμές διαγράφονται το πολύ k όταν λαμβάνουμε από το δίκτυο ροής G το δίκτυο ροής G'. Έτσι, ο αριθμός των χιαστί ακμών ως προς την αποκοπή (V_1', V_2') για το δίκτυο ροής G' είναι τουλάχιστον $|f| - k$.
Αφού η αποκοπή (V_1', V_2') επιλέχθηκε αυθαίρετα, έπεται ότι η ελάχιστη αποκοπή για το δίκτυο ροής G' έχει μέγεθος τουλάχιστον $|f| - k$. Το Θεώρημα "Μέγιστη Ροή = Ελάχιστη Αποκοπή" συνεπάγεται ότι η μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής G' είναι τουλάχιστον $|f| - k$.
$\square$

Η Πρόταση 1 συνεπάγεται ότι το δίκτυο ροής G' που επιστρέφει ο αλγόριθμός μας (και για το οποίο η μέγιστη ροή είναι το πολύ $|f| - k$) επιτυγχάνει την ελάχιστη δυνατή μέγιστη ροή.

3. [Διασκευή του Προβλήματος 7.19 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Η ιατρική συμβουλευτική εταιρία Γιατροί Χωρίς Σαββατοκυρίακα έχει να επιλύσει ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού ενός νοσοκομείου με k γιατρούς για τις επόμενες n μέρες κάτω από τους εξής δύο περιορισμούς:

- Για τη μέρα i, όπου $1 \leq i \leq n$, χρειάζεται να είναι παρόντες (ακριβώς) p_i γιατροί στο νοσοκομείο.
- Ο γιατρός j, όπου $1 \leq j \leq k$, έχει ένα σύνολο L_j των ημερών στις οποίες μπορεί να δουλέψει.

Θέλουμε να βρούμε για κάθε γιατρό j, όπου $1 \leq j \leq k$, ένα σύνολο L_j' ημερών στις οποίες θα δουλέψει ώστε να ικανοποιούνται οι δύο περιορισμοί. (Προφανώς, $L_j' \subseteq L_j$ για κάθε γιατρό j, όπου $1 \leq j \leq k$.)
Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων. Ο αλγόριθμός σας πρέπει είτε να βρίσκει μία λύση (κάτω από τους δύο περιορισμούς) είτε να αναφέρει ότι δεν υπάρχει λύση.

Λύση: Από τα δεδομένα του προβλήματός μας, κατασκευάζουμε ένα δίκτυο ροής $G = (V, E)$ ως εξής:

- Υπάρχει μία πηγή s και ένας προορισμός t.
- Για κάθε γιατρό j, όπου $1 \leq j \leq k$, υπάρχει μία κορυφή u_j. Για κάθε μέρα i, όπου $1 \leq i \leq n$, υπάρχει μία κορυφή v_i.
- Για κάθε ζευγάρι γιατρού j και μέρας i, όπου $1 \leq j \leq k$ και $1 \leq i \leq n$, βάζουμε την ακμή $u_j, v_i)$ με χωρητικότητα 1 αν (και μόνο αν) ο γιατρός j μπορεί να δουλέψει τη μέρα i — δηλαδή, αν και μόνο αν $i \in L_j$.
- Για κάθε γιατρό j, όπου $1 \leq j \leq k$, βάζουμε την ακμή (s, u_j) με χωρητικότητα $|L_j|$.
- Για κάθε μέρα i, όπου $1 \leq i \leq n$, βάζουμε την ακμή (v_i, t) με χωρητικότητα p_i.

Παρατηρούμε ότι από την κατασκευή μας, η τιμή της μέγιστης ροής στο δίκτυο ροής G είναι το πολύ $\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Οι δύο προτάσεις που ακολουθούν ανάγουν το υπολογιστικό πρόβλημα που έχουμε να υπολογίσουμε στο πρόβλημα υπολογισμού της μέγιστης ροής για το δίκτυο ροής G. Ξεκινάμε με την πρώτη.

Πρόταση 1. Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση για το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων (κάτω από τους δύο περιορισμούς). Τότε, η τιμή της μέγιστης ροής για το δίκτυο ροής G είναι $\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Η απόδειξη θα είναι κατασκευαστική — από μία λύση για το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων, θα κατασκευάσουμε μία ροή για το δίκτυο ροής G με τιμή $\sum_{i=1}^{n} p_i$ (η οποία είναι μέγιστη).

Απόδειξη. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει για κάθε γιατρό j, όπου $1 \leq j \leq k$, ένα σύνολο ημερών L'_j στις οποίες ο γιατρός j δουλεύει έτσι ώστε οι δύο περιορισμοί του προβλήματος να ικανοποιούνται.

Στέλνουμε ροή ίση με 1 πάνω σε κάθε μονοπάτι $s \rightsquigarrow u_j \rightsquigarrow v_i \rightsquigarrow t$ τέτοιο ώστε ο γιατρός j δουλεύει την μέρα i, όπου $1 \leq j \leq k$ και $1 \leq i \leq n$. Έστω f η ροή που προκύπτει.

- Η κατασκευή της ροής f ικανοποιεί κατευθείαν την διατήρηση της ροής.
- Θα δείξουμε τώρα ότι ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιείται. Από την κατασκευή του δικτύου ροής G, η ροή πάνω σε μία ακμή του δικτύου είναι 1 εκτός αν η ακμή είναι της μορφής *(ι)* (v_i, t) όπου $1 \leq i \leq n$, ή *(ιι)* (s, u_j) όπου $1 \leq j \leq k$. Αφού όλες οι χωρητικότητες είναι τουλάχιστον 1, χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο αυτές τις ακμές.
  - Ακμή της μορφής (v_i, t) όπου $1 \leq i \leq n$: Από την κατασκευή μας, η ροή πάνω στην ακμή αυτή είναι ίση με την ροή η οποία μπαίνει στην κορυφή v_i. Από την κατασκευή μας, η ροή αυτή είναι ίση με τον αριθμό των γιατρών που δουλεύουν την μέρα i. Από τον δεύτερο περιορισμό του προβλήματος, ο αριθμός των γιατρών που δουλεύουν την μέρα i είναι ίσος με p_i. Έπεται ότι η ροή πάνω στην ακμή (v_i, t) είναι p_i. Από την κατασκευή μας, η ακμή (v_i, t) έχει χωρητικότητα p_i. Έπεται ότι ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιείται για την ακμή (v_i, t).
  - Ακμή της μορφής (s, u_j) όπου $1 \leq j \leq k$: Από την κατασκευή μας, η ροή πάνω στην ακμή αυτή είναι ίση με την ροή η οποία βγαίνει από την κορυφή u_i. Από την κατασκευή μας, η ροή αυτή είναι ίση με τον αριθμό των ημερών στις οποίες ο γιατρός i δουλεύει. Από τον πρώτο περιορισμό του προβλήματος, ο αριθμός των ημερών στις οποίες ο γιατρός j δουλεύει είναι το πολύ $|L_j|$. Από την κατασκευή μας, η ακμή (s, u_j) έχει χωρητικότητα $|L_j|$. Έπεται ότι ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιείται για την ακμή (s, u_j).

Έχουμε δείξει συνολικά ότι η διατήρηση της ροής και ο περιορισμός της χωρητικότητας ικανοποιούνται. □

Συνεχίζουμε ώστε να δείξουμε:

Πρόταση 2. Υποθέτουμε ότι η τιμή της μέγιστης ροής για το δίκτυο ροής G είναι $\sum_{i=1}^{n} p_i$. Τότε, υπάρχει λύση για το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων (κάτω από τους δύο περιορισμούς).

Η απόδειξη θα είναι κατασκευαστική — από μία μέγιστη ροή για το δίκτυο ροής G (με τιμή $\sum_{i=1}^{n} p_i$) θα κατασκευάσουμε μία λύση για το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων.

Απόδειξη. Οπως έχουμε δείξει στο μάθημα, η υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι υπάρχει ακέραιη (μέγιστη) ροή f για το δίκτυο ροής G με τιμή $\sum_{i=1}^{n} p_i$. Θεωρούμε οποιοδήποτε γιατρό j, όπου $1 \leq j \leq k$. Από τον περιορισμό της χωρητικότητας, η ροή πάνω σε οποιαδήποτε ακμή (u_j, v_i), όπου $1 \leq i \leq n$, είναι ίση με 0 ή 1.

Προγραμματίζουμε ότι ο γιατρός j θα δουλέψει την μέρα i, όπου $1 \leq i \leq n$, αν (και μόνο αν) η ροή πάνω στην ακμή (u_j, v_i) είναι 1.

Απομένει να δείξουμε ότι οι δύο περιορισμοί του προβλήματός μας ικανοποιούνται.

- Αφού η τιμή της ροής f είναι $\sum_{i=1}^{n} p_i$, η συνολική ροή που μπαίνει στον προορισμό t είναι $\sum_{i=1}^{n} p_i$. Αφού το άθροισμα των χωρητικοτήτων των ακμών που εισέρχονται στον προορισμό t είναι $\sum_{i=1}^{n} p_i$, έπεται ότι για κάθε ακμή (v_i, t) όπου $1 \leq i \leq n$, η ροή πάνω στην ακμή (v_i, t) είναι p_i.

  Εξετάζουμε οποιαδήποτε μέρα i, όπου $1 \leq i \leq n$. Η διατήρηση της ροής για την κορυφή v_i συνεπάγεται ότι η συνολική ροή που μπαίνει στην κορυφή v_i είναι p_i. Από την κατασκευή μας, κάθε ακμή που εισέρχεται στην κορυφή v_i έχει χωρητικότητα 1. 'Επεται ότι υπάρχουν ακριβώς p_i ακμές (u_j, p_i), όπου $1 \leq j \leq k$, οι οποίες εισέρχονται στην κορυφή v_i και φέρουν ροή 1. Από την κατασκευή μας, ο αριθμός των γιατρών που θα δουλέψουν την μέρα i είναι p_i.

- 'Εστω ότι ο γιατρός j θα δουλέψει την μέρα i, όπου $1 \leq j \leq k$ και $1 \leq i \leq n$. Από την κατασκευή της λύσης για το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού των νοσοκομείων, η ροή πάνω στην ακμή (u_j, v_i) είναι 1. Αφού η (u_j, v_i) είναι ακμή στο δίκτυο ροής G, η κατασκευή του G συνεπάγεται ότι ο γιατρός j μπορεί να δουλέψει την μέρα i.

'Εχουμε δείξει συνολικά ότι οι δύο περιορισμοί του προβλήματός μας ικανοποιούνται. □

Οι Προτάσεις 1 και 2 συνεπάγονται τον ακόλουθο αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει κατά πόσο ή όχι είναι δυνατός ο χρονοπρογραμματισμός των νοσοκομείων (κάτω από τους δύο περιορισμούς):

- Από τα δεδομένα του προβλήματος, κατασκευάζουμε το δίκτυο ροής G.
- Υπολογίζουμε την μέγιστη ροή στο δίκτυο ροής G με τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson, και ελέγχουμε αν η τιμή της ισούται με $\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου κυριαρχείται από την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Ford-Fulkerson πάνω σε ένα δίκτυο ροής με $O(kn)$ ακμές.

4. [Διασκευή του Προβλήματος 7.22 από το βιβλίο Algorithm Design των Kleinberg και Tardos.] Θεωρούμε ένα πίνακα $\mathbf{M}$ διαστάσεων $n \times n$ με κάθε στοιχείο του m_{ij}, όπου $1 \le i \le n$ και $1 \le j \le n$, ίσο με 0 ή 1. Λέμε ότι ο πίνακας $\mathbf{M}$ είναι *αναδιατάξιμος* αν είναι δυνατό να αντιμεταθέσουμε κάποια από τα ζευγάρια των ακμών του και κάποια από τα ζευγάρια των στηλών του (με οποιαδήποτε σειρά) έτσι ώστε, μετά από τις αντιμεταθέσεις, όλα τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{M}$ να είναι ίσα με 1.

(α) Δώστε ένα παράδειγμα ενός πίνακα $\mathbf{M}$ όπου σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο ίσο με 1, αλλά ο $\mathbf{M}$ δεν είναι αναδιατάξιμος.

Λύση: Θεωρούμε τον πίνακα

$$\mathbf{M} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

διαστάσεων 3×3. Η γραμμή 1 εξασφαλίζει ότι ένα διαγώνιο στοιχείο του M είναι ίσο με 1, και η στήλη 1 εξασφαλίζει ότι ένα διαγώνιο στοιχείο του M είναι ίσο με 1. Μαζί η γραμμή 1 και η στήλη 1 εξασφαλίζουν ότι το πολύ δύο διαγώνια στοιχεία του M είναι ίσα με 1. Αφού ο M έχει τρία διαγώνια στοιχεία, έπεται ότι ο M δεν είναι αναδιατάξιμος.

(β) Παρουσιάστε και αναλύστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει κατά πόσο ή όχι ο πίνακας $\mathbf{M}$ είναι αναδιατάξιμος.

Λύση: Χρησιμοποιούμε τον πίνακα M για να ορίσουμε τον διμερή γράφο $\mathsf{G}(\mathrm{M})$ ως εξής:

- Τα δύο σύνολα κορυφών του είναι $\mathsf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $\mathsf{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$. (Διαισθητικά, το σύνολο X αντιστοιχεί στις γραμμές του πίνακα M και το σύνολο Y αντιστοιχεί στις στήλες του πίνακα M.)
- Για κάθε ζεύγος δεικτών i και j, όπου $1 \le i, j \le n$, έχουμε μία ακμή μεταξύ των κορυφών x_i και y_j αν και μόνο αν $m_{ij} = 1$.

Αφού $|\mathsf{X}| = |\mathsf{Y}|$, ένα τέλειο ταίριασμα για τον γράφο $\mathsf{G}(\mathrm{M})$ είναι μία μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ — δηλαδή, μία ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Από τον ορισμό του διμερούς γράφου $\mathsf{G}(\mathrm{M})$, έχουμε ότι για κάθε δείκτη i, όπου $1 \le i \le n$, $m_{if(i)} = 1$. Θα δείξουμε ότι:

Πρόταση 1. Ο πίνακας M είναι αναδιατάξιμος αν και μόνο αν ο διμερής γράφος $\mathsf{G}(\mathrm{M})$ έχει ένα τέλειο ταίριασμα.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι ο γράφος G(M) έχει ένα τέλειο ταίριασμα f. Έτσι, για κάθε κορυφή x_i, όπου $1 \le i \le n$, $y_{f(i)}$ είναι η κορυφή με την οποία αυτή ταιριάζεται. Αφού η f είναι μετάθεση, αντιμεταθέτουμε τις γραμμές του πίνακα M έτσι ώστε για κάθε δείκτη i, όπου $1 \le i \le n$, η γραμμή i να ταυτιστεί με την γραμμή $f(i)$. Αφού για κάθε δείκτη i, όπου $1 \le i \le n$, έχουμε ότι $m_{if(i)} = 1$, όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα M που προκύπτει από τις αντιμεταθέσεις είναι ίσα με 1. Έπεται ότι ο πίνακας M είναι αναδιατάξιμος.
Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας M είναι αναδιατάξιμος. Έτσι, υπάρχουν μεταθέσεις $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ και $g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοιες ώστε για κάθε ζεύγος δεικτών i και j, όπου $1 \le i, j \le n$, η γραμμή i απεικονίζεται στη γραμμή $f(i)$ και η στήλη j απεικονίζεται στη στήλη $g(j)$. Οι μεταθέσεις f και g μετασχηματίζουν τον πίνακα M στον πίνακα M', έτσι ώστε για οποιοδήποτε δείκτη k, όπου $1 \le k \le n$, $m'_{kk} = 1$. Αφού οι f και g είναι μεταθέσεις, ορίζονται οι αντίστροφοί τους f^{-1} και g^{-1}, αντίστοιχα, οι οποίες είναι επίσης μεταθέσεις. Έτσι, για οποιοδήποτε δείκτη k, θεωρούμε τους δείκτες $f^{-1}(k)$ και $g^{-1}(k)$. Προφανώς, θα ισχύει ότι $m_{f^{-1}(k)g^{-1}(k)} = 1$. Από την κατασκευή του γράφου G(M), έπεται ότι υπάρχει ακμή μεταξύ των κορυφών $x_{f^{-1}(k)}$ και $y_{g^{-1}(k)}$ στον γράφο G(M). Αφού οι συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1} είναι μεταθέσεις, έπεται ότι το σύνολο των ακμών $\{(x_{f^{-1}(k)}, y_{g^{-1}(k)}) \mid 1 \le k \le n\}$ είναι ένα τέλειο ταίριασμα για τον γράφο G(M). $\square$

Η Πρόταση 1 συνεπάγεται τον ακόλουθο αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει κατά πόσο ή όχι ο πίνακας M είναι αναδιατάξιμος:

- Από τον πίνακα M, κατασκευάζουμε τον διμερή γράφο G(M).
- Ελέγχουμε αν ο διμερής γράφος G(M) έχει ένα τέλειο ταίριασμα.
  - Ο έλεγχος γίνεται με αναγωγή στο πρόβλημα μέγιστης ροής. (Δηλαδή, από τον διμερή γράφο G(M), κατασκευάζουμε ένα δίκτυο ροής, για το οποίο υπολογίζουμε την μέγιστη ροή με τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson. Το μέγεθος του μεγίστου ταιριάσματος λαμβάνεται ίσο με την τιμή της μέγιστης ροής που υπολογίσαμε. Αν το μέγεθος του μεγίστου ταιριάσματος ισούται με n, τότε (και μόνο τότε) αποφασίζουμε ότι ο διμερής γράφος G(M) έχει ένα τέλειο ταίριασμα.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου κυριαρχείται από την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Ford-Fulkerson πάνω σε ένα δίκτυο ροής με $O(n^2)$ ακμές.