Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

1. **(20 μονάδες)** Ο V. Pan ανακάλυψε ένα αλγόριθμο *διαίρει-και-βασίλευε* για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ο οποίος βασίζεται στον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων 70×70 με $143,640$ πολλαπλασιασμούς. Προσδιορίστε τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του Pan. (Θεωρείστε ότι ο αριθμός των προσθέσεων πινάκων $\frac{n}{70} \times \frac{n}{70}$ κατά τη φάση *βασίλευε* του αλγορίθμου του Pan είναι σταθερός.)

Λύση: Προς διευκόλυνση της αναδρομής, θα υποθέσουμε απλοποιητικά ότι ο n είναι δύναμη του 70. Τότε, η πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$ του αλγορίθμου του Pan ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\mathsf{T}(n) = \begin{cases} 143,640\,\mathsf{T}\left(\frac{n}{70}\right) + k\left(\frac{n}{70}\right)^2, & \text{αν } n > 70 \\ T, & \text{αν } n = 70 \end{cases},$$

όπου $k > 0$ και $T \geq 143,640$ είναι κατάλληλες σταθερές. (Προσέξτε ότι δεν ισχύει απαραίτητα ότι $T = 143,640$ καθώς είναι δυνατόν ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων 70×70 να χρησιμοποιεί προσθέσεις επιπρόσθετα των $143,640$ (βαθμωτών) πολλαπλασιασμών. Έτσι, γενικά, $T \geq 143,640$.) Για την επίλυσή της, θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Γενικής Χρήσης. Παρατηρούμε ότι $\lg_{70} 143,640 \approx 2.795 > 2$. Έτσι, είμαστε στην περίπτωση (3), όπου $\mathsf{T}(n) = \Theta(n^{2.795})$. (Παρατηρούμε ότι $2.795 < 2.81$. Έτσι, ο αλγόριθμος του Pan είναι ασυμπτωτικά αποδοτικότερος από τον αλγόριθμο του Strassen.)

Επιπρόσθετη σημείωση: Στη γενική περίπτωση, οποιοσδήποτε αλγόριθμος ο οποίος χρησιμοποιεί c πολλαπλασιασμούς για τον υπολογισμό του γινομένου δύο πινάκων $d \times d$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως η βάση για αναδρομικό αλγόριθμο (του τύπου διαίρει-και-βασίλευε) για τον υπολογισμό του γινομένου δύο πινάκων $n \times n$, όπου $n \geq d$. (Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος του Strassen είναι η ειδική περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε $c = 7$ και $d = 2$, ενώ ο αλγόριθμος του Pan είναι η ειδική περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε $c = 143,640$ και $d = 70$.)

Θα αναλύσουμε την πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$ του γενικού αναδρομικού αλγορίθμου που προκύπτει. Προς διευκόλυνση της αναδρομής, θα υποθέσουμε απλοποιητικά ότι ο n είναι δύναμη του d. Εξακολουθούμε να θεωρούμε ότι ο αριθμός των προσθέσεων (πινάκων $\frac{n}{d} \times \frac{n}{d}$) κατά τη φάση "βασίλευε" είναι σταθερός. Τότε, η πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\mathsf{T}(n) = \begin{cases} c\,\mathsf{T}\left(\frac{n}{d}\right) + k\left(\frac{n}{d}\right)^2, & \text{αν } n > d \\ T, & \text{αν } n = d \end{cases},$$

όπου $k > 0$ και $T \geq c$ είναι κατάλληλες σταθερές. (Ξανά, προσέξτε ότι δεν ισχύει απαραίτητα ότι $T = c$ καθώς είναι δυνατό ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος για τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων $d \times d$ να χρησιμοποιεί προσθέσεις επιπρόσθετα των c (βαθμωτών) πολλαπλασιασμών. Έτσι, γενικά, $T \geq c$.) Στην περίπτωση όπου $\lg_d c > 2$, το Θ. Γενικής Χρήσης (περίπτωση (3)) εξασφαλίζει ότι $\mathsf{T}(n) = \Theta(n^{\lg_d c})$. Ο (γενικός) αναδρομικός αλγόριθμος θα είναι ασυμπτωτικά αποδοτικότερος από τον αλγόριθμο του Strassen εφόσον ισχύει ότι $\lg_d c < \lg_2 7$ ή $c < d^{\lg_2 7} \approx d^{2.81}$. (Για παράδειγμα, για $d = 3$, χρειάζεται να ισχύει ότι $c < 3^{2.81} \approx 21.8$.

Ωστόσο, ο καλύτερος <u>γνωστός</u> αλγόριθμος για τον υπολογισμό του γινομένου δύο πινάκων 3×3 χρησιμοποιεί 23 πολλαπλασιασμούς! Μπορείτε να τον βελτιώσετε;)

2. **(25 μονάδες)** Θεωρείστε τα σημεία $\{1, 2, \ldots, n\}$ πάνω στην πραγματική ευθεία. Στο σημείο j, όπου $1 \leq j \leq n$, τοποθετούμε ηλεκτρικό φορτίο q_j (το οποίο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό). Ο Νόμος του Coulomb προβλέπει ότι η συνολική ηλεκτροστατική δύναμη F_j πάνω στο φορτίο q_j, όπου $1 \leq j \leq n$, είναι

$$F_j \;=\; \sum_{i<j} \frac{C q_i q_j}{(j-i)^2} - \sum_{i>j} \frac{C q_i q_j}{(i-j)^2}\,.$$

Σχεδιάστε αλγόριθμο με πολυπλοκότητα $\Theta(n \lg n)$ ο οποίος υπολογίζει όλες τις δυνάμεις F_j, όπου $1 \leq j \leq n$.

<u>**Λύση:**</u> Παρατηρούμε ότι

$$F_j \;=\; C q_j \left(\sum_{i<j} \frac{q_i}{(j-i)^2} - \sum_{i>j} \frac{q_i}{(i-j)^2} \right)\,.$$

Η <u>ιδέα</u> του αλγορίθμου είναι να ορίσουμε κατάλληλο ζεύγος διανυσμάτων έτσι ώστε η συνέλιξή τους να περιέχει (ως συνιστώσες της) όλους τους όρους $\sum_{i<j} \frac{q_i}{(j-i)^2} - \sum_{i>j} \frac{q_i}{(i-j)^2}$, όπου $1 \leq j \leq n$. Αφού η συνέλιξη δύο διανυσμάτων μπορεί να υπολογισθεί με τον αλγόριθμο FFT σε χρόνο $\Theta(n \lg n)$, το ζητούμενο τότε θα έπεται.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{q} = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$ και $\mathbf{r} = \langle r_{-n}, r_{-(n-1)}, \ldots, r_{-1}, r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n \rangle$, όπου για κάθε δείκτη $k \in \{-n, -(n-1), -1, +1, \ldots, n-1, n\}$, $r_k = \frac{-\mathsf{sgn}(k)}{|k|^2}$, ενώ $r_0 = 0$. Έτσι, $\mathbf{r} = \langle n^{-2}, (n-1)^{-2}, \ldots, 2^{-2}, 1, 0, -1, -2^{-2}, \ldots, -(n-1)^{-2}, -n^{-2} \rangle$. Τότε, η συνέλιξη $\mathbf{c} = \mathbf{q} * \mathbf{r}$ των διανυσμάτων $\mathbf{q}$ και $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{c} = \langle c_{1-n}, c_{2-n}, \ldots, c_{2n} \rangle$ όπου για κάθε δείκτη j, $1 - n \leq j \leq 2n$,

$$\begin{aligned}
c_j &= \sum_{\langle i,k \rangle \mid 1 \leq i \leq n, -n \leq k \leq n, i+k=j} q_i\, r_k \\
&= \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, -n \leq j-i \leq n} q_i\, r_{j-i} \\
&= \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, -n \leq j-i < 0} q_i\, r_{j-i} + \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, j-i=0} q_i\, r_{j-i} + \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, 0 < j-i \leq n} q_i\, r_{j-i} \\
&= \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, -n \leq j-i < 0} q_i\, r_{j-i} + \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, 0 < j-i \leq n} q_i\, r_{j-i} \\
&= \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, -n \leq j-i < 0} q_i \cdot -\frac{1}{(i-j)^2} + \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, 0 < j-i \leq n} q_i \cdot \frac{1}{(j-i)^2}\,.
\end{aligned}$$

Μας ενδιαφέρουν μόνο οι δείκτες j για τους οποίους ισχύει ότι $1 \leq j \leq n$. Τότε, αφού $1 \leq i \leq n$, έχουμε ότι $j - i \geq 1 - n > -n$ και $i - j \leq n - 1 < n$, και επομένως

$$\begin{aligned}
c_j &= -\sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, i > j} q_i \cdot \frac{1}{(i-j)^2} + \sum_{i \mid 1 \leq i \leq n, i < j} q_i \cdot \frac{1}{(j-i)^2} \\
&= \frac{F_j}{C q_j}\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, κάθε δύναμη F_j, όπου $1 \leq j \leq n$, μπορεί να ανακατασκευαστεί από την αντίστοιχη συνιστώσα της συνέλιξης $\mathbf{q} * \mathbf{r}$ (διά πολλαπλασιασμού επί Cq_j). Αυτό υπαγορεύει τον ακόλουθο αλγόριθμο για τον υπολογισμό όλων των δυνάμεων F_j, όπου $1 \leq j \leq n$:

- Διά του αλγορίθμου FFT, υπολόγιζουμε τη συνέλιξη $\mathbf{c} = \mathbf{q} * \mathbf{r}$.
- Για κάθε δείκτη j, όπου $1 \leq j \leq n$, θέτουμε $F_j := Cq_j c_j$.

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\Theta(n \lg n)$ (όση και του αλγορίθμου FFT, αφού η ανακατασκευή όλων των δυνάμεων F_j, όπου $1 \leq j \leq n$, από τις αντίστοιχες συνιστώσες c_j της συνέλιξης $\mathbf{c}$ χρειάζεται $\Theta(n)$ βήματα).

3. (25 **μονάδες**) Θα αναλύσουμε ένα αλγόριθμο του τύπου *διαιρει-και-βασίλευε* για τον πολλαπλασιασμό δύο ακεραίων y και z με n δυαδικά ψηφία ο καθένας.

- Μοιράζουμε τον y σε τρία μέρη a, b και c με $\frac{n}{3}$ ψηφία το καθένα.
- Μοιράζουμε τον z σε τρία μέρη d, e και f με $\frac{n}{3}$ ψηφία το καθένα.
- Αναδρομικά υπολογίζουμε:
  - $r_1 := a \cdot d$
  - $r_2 := (a+b) \cdot (d+e)$
  - $r_3 := b \cdot e$
  - $r_4 := (a+c) \cdot (d+f)$
  - $r_5 := c \cdot f$
  - $r_6 := (b+c) \cdot (e+f)$
- Θέτουμε:

$$\begin{aligned} x &:= r_1 2^{\frac{4n}{3}} + (r_2 - r_1 - r_3) 2^n + (r_3 + r_4 - r_1 - r_5) 2^{\frac{2n}{3}} \\ &\quad + (r_6 - r_3 - r_5) 2^{\frac{n}{3}} + r_5 \,. \end{aligned}$$

(α) Αποδείξτε ότι $x = yz$.

<u>**Λύση:**</u> Από τα βήματα του αλγορίθμου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= ad2^{\frac{4n}{3}} + ((a+b)(d+e) - ad - be)2^n + (be + (a+c)(d+f) - ad - cf)2^{\frac{2n}{3}} \\ &\quad + ((b+c)(e+f) - be - cf)2^{\frac{n}{3}} + cf \\ &= ad2^{\frac{4n}{3}} + (ae+bd)2^n + (be + af + cd)2^{\frac{2n}{3}} + (bf+ce)2^{\frac{n}{3}} + cf \\ &= yz \,, \end{aligned}$$

όπως χρειάζεται.

(β) $\boxed{\text{Προσδιορίστε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.}}$

<u>**Λύση:**</u> Προς διευκόλυνση της αναδρομής, θα υποθέσουμε απλοποιητικά ότι ο n είναι δύναμη του 3. Έστω $\mathsf{T}(n)$ η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Τα βήματα του αλγορίθμου περιέχουν:

- Έξη αναδρομικούς πολλαπλασιασμούς ακεραίων μήκους $\frac{n}{3}$ (κατά τους υπολογισμούς των r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 και r_6, αντίστοιχα). Κάθε αναδρομικός πολλαπλασιασμός συνεισφέρει $\mathsf{T}(\frac{n}{3})$ στην πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$.
- Σταθερό αριθμό προσθέσεων ακεραίων με μήκος μικρότερο από n. Οι προσθέσεις συνεισφέρουν kn στην πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$, για κάποια κατάλληλη σταθερά $k > 0$.

Έτσι, λαμβάνουμε την αναδρομική σχέση

$$\mathsf{T}(n) \quad = \quad \begin{cases} 6\,\mathsf{T}\left(\frac{n}{3}\right) + kn\,, & \text{αν } n \geq 3 \\ T\,, & \text{αν } n < 3 \end{cases}\,,$$

όπου $T > 0$ είναι κατάλληλη σταθερά. Για την επίλυσή της, θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Γενικής Χρήσης. Παρατηρούμε ότι $\lg_3 6 = 1.63 > 1$, οπότε βρισκόμαστε στην περίπτωση (3). Τότε, $\mathsf{T}(n) = \Theta(n^{1.63})$, όπως χρειάζεται.

4. **(30 μονάδες)** Θεωρούμε μια συλλογή από n (μη κατακόρυφες) ευθείες $\ell_1, \ldots, \ell_n$ στο επίπεδο. Η ευθεία ℓ_i, όπου $1 \leq i \leq n$, προσδιορίζεται από την εξίσωση $y = a_i x + b_i$ και παριστάνεται από το διατεταγμένο ζεύγος (a_i, b_i). Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τριάδα ευθειών που συναντώνται στο ίδιο σημείο.
Η ευθεία ℓ_i είναι **ανώτατη** στο σημείο $x = x_0$ αν η αντίστοιχη συντεταγμένη y για το σημείο x_0 είναι η μέγιστη μεταξύ όλων των ευθειών (για το ίδιο σημείο). Η ευθεία ℓ_i είναι **ορατή** αν υπάρχει κάποιο σημείο στο οποίο είναι ανώτατη. Παρουσιάστε αλγόριθμο με πολυπλοκότητα $\Theta(n \lg n)$ ο οποίος επιστρέφει όλες τις ορατές ευθείες.

<u>**Λύση:**</u> Προς διευκόλυνση της αναδρομής, θα υποθέσουμε απλοποιητικά ότι ο n είναι δύναμη του 2. Θεωρούμε τον ακόλουθο αναδρομικό αλγόριθμο του τύπου διαίρει-και-βασίλευε:

- <u>Φάση προεπεξεργασίας</u>: Διάταξε τις n ευθείες κατά μη φθίνουσα κλίση. (Η διάταξη αυτή λαμβάνεται αν ταξινομήσουμε τις κλίσεις a_i, όπου $1 \leq i \leq n$, των n ευθειών.) Έστω $\ell_1, \ldots, \ell_n$ η διάταξη που προκύπτει.
- <u>Βάση</u>: Αν $n \leq 3$, υπολόγισε το σημείο τομής σ_{12} των ευθειών ℓ_1 και ℓ_2. και το σημείο τομής σ_{13} των ευθειών ℓ_1 και ℓ_3

  Οι ευθείες ℓ_1 και ℓ_3 θα είναι πάντοτε ορατές. Η ευθεία ℓ_2 θα είναι ορατή αν και μόνο αν το σημείο σ_{12} βρίσκεται αριστερότερα από το σημείο σ_{13}.
- <u>Διαίρει</u>: Αν $n > 3$, θεώρησε τις μικρότερες συλλογές ευθειών $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ldots, \ell_{\frac{n}{2}}\}$ και $\mathcal{L}' = \{\ell_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, \ell_n\}$. Υπολόγισε αναδρομικά τις ορατές ευθείες $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p}$ (διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα κλίση) για το σύνολο $\mathcal{L}$ και τις ορατές ευθείες $\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_q}$ (διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα κλίση) για το σύνολο $\mathcal{L}'$. (Προφανώς, $p + q \leq n$.)

  Κατά τις δύο αναδρομές, υπολόγισε επίσης τα σημεία τομής $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ (αντίστοιχα, $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{q-1}$): σ_k (αντίστοιχα, σ'_k) είναι το σημείο τομής των ευθειών ℓ_{i_k} και $\ell_{i_{k+1}}$ (αντίστοιχα, το σημείο τομής των ευθειών ℓ_{j_k} και $\ell_{j_{k+1}}$), όπου $1 \leq k \leq p-1$ (αντίστοιχα, $1 \leq k \leq q-1$).

- <u>Βασίλευε:</u> Θα προσδιορίσουμε τις ορατές ευθείες στη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$ (διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα κλίση). Θα προσδιορίσουμε, επίσης, τα σημεία τομής για κάθε ζεύγος διαδοχικών ορατών ευθειών. Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η ευθεία ℓ_{i_1} είναι ορατή στη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$ επειδή έχει την ελάχιστη κλίση. Αντίστοιχα, η ευθεία ℓ_{j_q} είναι ορατή στη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$ επειδή έχει την μέγιστη κλίση. Απομένει να προσδιορίσουμε τις υπόλοιπες ορατές ευθείες (εφόσον τέτοιες υπάρχουν) στη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$ (και τα αντίστοιχα σημεία τομής).
  - Συγχώνευσε τις δύο (διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα x-συντεταγμένη) ακολουθίες σημείων τομής $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ και $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{p-1}$ σε μία κοινή ακολουθία $\tau_1, \ldots, \tau_{p+q-2}$ (διατεταγμένη κατά μη φθίνουσα x-συντεταγμένη).
  - Για κάθε δείκτη k, όπου $1 \leq k \leq p+q-2$, προσδιορίζουμε την ευθεία $\ell(k)$ η οποία είναι ανώτατη στη x-συντεταγμένη του σημείου τ_k για τη συλλογή $\mathcal{L}$ και την ευθεία $\ell'(k)$ η οποία είναι ανώτατη στη x-συντεταγμένη του σημείου τ_k για τη συλλογή $\mathcal{L}'$. (Έτσι, $\ell(k) \in \{\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p}\}$ και $\ell'(k) \in \{\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_q}\}$.)
  - Προσδιορίζουμε τον ελάχιστο δείκτη κ για τον οποίο ισχύει ότι η ανώτατη ευθεία $\ell'(\kappa)$ στη x-συντεταγμένη του σημείου τ_k για τη συλλογή $\mathcal{L}'$ είναι ανώτερη από την ανώτατη ευθεία $\ell(\kappa)$ στη x-συντεταγμένη του σημείου τ_k για τη συλλογή $\mathcal{L}$. Θεωρούμε ότι $\ell(\kappa) = \ell_{i_s}$ και $\ell'(\kappa) = \ell_{j_t}$, όπου $1 \leq s \leq p$ και $1 \leq t \leq q$.
  - Προσδιορίζουμε το σημείο τομής (x^*, y^*) των ευθειών ℓ_{i_s} και ℓ_{j_t}.
  - Η ακολουθία των ορατών ευθειών για τη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$ είναι η $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_s}, \ell_{j_t}, \ell_{j_q}$. Τα αντίστοιχα σημεία τομής είναι $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_{s-1}}, (x^*, y^*), \sigma_{j_t}, \ldots, \sigma_{j_{q-1}}$.

<u>Ορθότητα:</u> Η απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου είναι επαγωγικη. Στη <u>βάση</u> (όπου $n \leq 3$), η ορθότητα είναι προφανής.

<u>Υποθέτουμε επαγωγικά</u> την ορθότητα των αναδρομικών υπολογισμών για τις ορατές ευθείες $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p}$ (διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα κλίση) για το σύνολο $\mathcal{L}$ και για τις ορατές ευθείες $\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_q}$ (διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα κλίση) για το σύνολο $\mathcal{L}'$.

Στο <u>επαγωγικό βήμα</u>, θα δείξουμε την ορθότητα στη φάση "βασίλευε". Παρατηρείστε ότι τα σημεία $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ είναι διατεταγμένα κατά μη φθίνουσα x-συντεταγμένη.

> Αυτό ισχύει διότι για κάθε ζεύγος διαδοχικών ορατών ευθειών ℓ_{i_k} και $\ell_{i_{k+1}}$, το διάστημα στο οποίο η ορατή ευθεία (με τη μικρότερη κλίση) ℓ_{i_k} είναι ανώτατη βρίσκεται αριστερά του διαστήματος στο οποίο η ορατή ευθεία (με τη μεγαλύτερη κλίση) $\ell_{i_{k+1}}$ είναι ανώτατη.

Αντίστοιχα, τα σημεία $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ είναι διατεταγμένα κατά μη φθίνουσα x-συντεταγμένη. Έτσι, οι δύο ακολουθίες σημείων τομής που συγχωνεύονται είναι πράγματι διατεταγμένες κατά μη φθίνουσα x-συντεταγμένη. Αυτό συνεπάγεται ότι η συντεταγμένη x^* βρίσκεται μεταξυ των x-συντεταγμένων των σημείων $\tau_{\kappa-1}$ και τ_κ. Έπεται ότι η ευθεία ℓ_{i_s} είναι ανώτατη στα σημεία αμέσως αριστερά του x^* για τη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$, και η ευθεία ℓ_{j_t} είναι ανώτατη στα σημεία αμέσως δεξιά του x^* για τη συλλογή $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$. Το ζητούμενο έπεται τώρα από την επαγωγική υπόθεση.

<u>Πολυπλοκότητα:</u> Έστω $\mathsf{T}(n)$ η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Προφανώς, $\mathsf{T}(n) = c$ αν $n \leq 3$, όπου $c > 0$ είναι κατάλληλη σταθερά. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου $n > 3$.

- Προφανώς, η φάση προεπεξεργασίας συνεισφέρει $\Theta(n \lg n)$ στην πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$. Αφού θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathsf{T}(n) = \Theta(n \lg n)$, θα αγνοήσουμε τη φάση προεπεξεργασίας κατά την ανάλυσή μας.
- Η φάση "διαίρει" συνεισφέρει $2\,\mathsf{T}\left(\frac{n}{2}\right)$ στην πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$.
- Στη φάση "βασίλευε", η συγχώνευση απαιτεί αριθμό βημάτων $\Theta(p+q)$, ενώ η εύρεση κάθε ζεύγους ευθειών $\ell(k)$ και $\ell'(k)$, όπου $1 \leq k \leq p+q-2$, απαιτεί σταθερό αριθμό βημάτων. Ο προσδιορισμός του δείκτη κ απαιτεί αριθμό βημάτων $\Theta(p+q)$, ενώ ο προσδιορισμός του σημείου τομής (x^*, y^*) απαιτεί σταθερό αριθμό βημάτων. Έπεται ότι ο σύνολικός αριθμός βημάτων για τη φάση "βασίλευε" είναι $\Theta(p+q) = \Theta(n)$ (αφού $p+q \leq n$).

Έπεται ότι η πολυπλοκότητα $\mathsf{T}(n)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\mathsf{T}(n) \quad = \quad \begin{cases} 2\,\mathsf{T}\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)\,, & \text{αν } n > 3 \\ c & \text{αν } n \leq 3 \end{cases} \quad ,$$

η οποία, ως γνωστό, έχει τη λύση $\mathsf{T}(n) = \Theta(n \lg n)$, όπως χρειάζεται.