

## 2η Σειρά Ασκήσεων

- Παράδοση: 3 Μαρτίου 2009 (στην έναρξη της διάλεξης).

1. (25 μονάδες) Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε κοντά στο τέλος του εαρινού εξαμήνου, στο οποίο παρακολουθείτε  $n$  μαθήματα. Καθένα από αυτά τα μαθήματα απαιτεί την παράδοση μίας τελικής εργασίας την οποία έχετε να ολοκληρώσετε. Κάθε τελική εργασία θα βαθμολογηθεί ως εξής: Θα λάβει ένα ακέραιο αριθμό στην κλίμακα από το 1 μέχρι το  $g$  (όπου  $g > 1$ ), και μεγαλύτεροι αριθμοί δείχνουν βέβαια μεγαλύτερους βαθμούς. Ο στόχος είναι να μεγιστοποιήσετε το άθροισμα των βαθμών σας στις  $n$  τελικές εργασίες.

Έχετε συνολικά στη διάθεσή σας  $H > n$  ώρες για να εργαστείτε στις  $n$  εργασίες που σας έχουν ανατεθεί, και θέλετε να αποφασίσετε την κατανομή των ωρών σας στις  $n$  εργασίες. Υποθέτουμε απλοποιητικά ότι ο  $H$  είναι ακέραιος, και ότι θα αφιερώσετε ένα ακέραιο αριθμό ωρών στην κάθε τελική εργασία. Για να λάβετε τις σωστές αποφάσεις, θα χρησιμοποιήσετε ένα σύνολο από συναρτήσεις ωφελιμότητας  $\{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  με την εξής σημασία: Αν αφιερώσετε  $h \leq H$  ώρες στην τελική εργασία για το μάθημα  $i$ , αυτή θα βαθμολογηθεί με  $f_i(h)$ . Μπορείτε να υποθέσετε ότι κάθε συνάρτηση  $f_i$  είναι μη φθίνουσα: αν  $h < h'$ , τότε  $f_i(h) \leq f_i(h')$ . Έτσι, το υπολογιστικό πρόβλημα που έχετε να επιλύσετε είναι το εξής: Με δεδομένες τις συναρτήσεις  $\{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ , βρείτε (ακέραιες) ώρες  $h_1, \dots, h_n$  με  $\sum_{i=1}^n h_i \leq H$  έτσι ώστε το άθροισμα  $\sum_{i=1}^n f_i(h_i)$  να μεγιστοποιηθεί.

Παρουσιάστε και αναλύστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το υπολογιστικό σας πρόβλημα. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι πολυωνυμική ως προς τις παραμέτρους  $n, g$  και  $H$ .

2. (25 μονάδες) Ως επενδυτές σε μία χρηματιστηριακή αγορά μετοχών, θεωρούμε τις επόμενες (συνεχόμενες) μέρες  $1, \dots, n$ . Η τιμή της μοναδιαίας μετοχής κατά την μέρα  $i$  είναι  $p(i)$ .

Έστω σταθερός (δυνατόν μεγάλος) ακέραιος  $K$  με  $K \leq n$ . Μία στρατηγική  $K$  αγοραπωλήσεων είναι μία ακολουθία από  $n$  ζεύγη ημερών  $(b_1, s_1), \dots, (b_m, s_m)$ , όπου  $0 \leq m \leq K$ , τέτοια ώστε  $1 \leq b_1 < s_1 < \dots < b_m < s_m \leq K$ . Έτσι, μία τέτοια στρατηγική είναι ένα σύνολο από το πολύ  $K$ , μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα, όπου ο επενδυτής αγοράζει 1,000 μετοχές την μέρα  $b_i$  και τις πωλεί την μέρα  $s_i$ , όπου  $1 \leq i \leq m$ . Το κέρδος μίας στρατηγικής  $K$  αγοραπωλήσεων είναι  $1,000 \sum_{i=1}^m (p(s_i) - p(b_i))$ .

Παρουσιάστε και αναλύστε ένα αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος θα βρίσκει την στρατηγική  $K$  αγοραπωλήσεων με το μέγιστο δυνατό κέρδος. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι πολυωνυμική ως προς τις παραμέτρους  $n$  και  $K$ .

3. (25 μονάδες) Είστε ο ιδιοκτήτης μίας αντιπροσωπείας η οποία εισάγει και πωλεί αυτοκίνητα πολυτελείας. Υπάρχουν προβλέψεις για τον αριθμό των πωλήσεων στους επόμενους μήνες  $1, \dots, n$ . Έστω  $d_i$  ο αριθμός των προβλεπομένων πωλήσεων για τον μήνα  $i$ , όπου  $1 \leq i \leq n$ . Όλες οι πωλήσεις λαμβάνουν χώραν κατά την πρώτην ημέρα του μήνα και τα αυτοκίνητα που δεν έχουν πωληθεί αποθηκεύονται μέχρι τον επόμενο μήνα. Μπορείτε να αποθηκεύσετε μέχρι  $S$  αυτοκίνητα στην αποθήκη σας, και το κόστος για την αποθήκευση ενός αυτοκινήτου είναι  $C$ .

Τα αυτοκίνητα αποστέλλονται στην αντιπροσωπεία σας κατόπιν παραγγελίας, και η κάθε παραγγελία στοιχίζει  $K$  (ανεξάρτητα από τον αριθμό των αυτοκινήτων που παραγγέλλονται). Αρχικά, δεν υπάρχουν καθόλου αυτοκίνητα στην αντιπροσωπεία σας.

Το υπολογιστικό πρόβλημα που έχετε να επιλύσετε είναι το εξής: Θέλετε να προσδιορίσετε τις παραγγελίες σας (δηλαδή, πόσα αυτοκίνητα θα παραγγείλετε και πότε) έτσι ώστε να ικανοποιήσετε όλες τις προβλεπόμενες πωλήσεις  $d_i$ , όπου  $1 \leq i \leq n$ , με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Παρουσιάστε και αναλύστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημά σας. Η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι πολυωνυμική ως προς τις παραμέτρους  $n$  και  $S$ .

4. (25 μονάδες) Ως ιδιοκτήτες ενός πρατηρίου βενζίνης, έχουμε να αντιμετωπίσουμε το εξής πρόβλημα: Υπάρχει μία υπόγεια αποθήκη βενζίνης η οποία μπορεί να αποθηκεύσει μέχρι και  $L$  γαλόνια βενζίνης. Η παραγγελία βενζίνης είναι ακριβή. Έτσι, θέλουμε να κρατήσουμε τον αριθμό των παραγγελιών όσο πιο μικρό γίνεται. Για κάθε παραγγελία, έχουμε να πληρώσουμε ένα κόστος  $K$  για την διανομή της βενζίνης στο πρατήριο μας (επιπρόσθετα προς το κόστος της βενζίνης). Ωστόσο, υπάρχει ένα κόστος  $C$  για την αποθήκευση ενός γαλονιού βενζίνης για μία μέρα. Έτσι, η παραγγελία μεγάλων ποσοτήτων μειώνει μεν τα κόστη διανομής (αφού θα γίνουν λιγότερες παραγγελίες), αυξάνει όμως τα κόστη αποθήκευσης.

Το πρατήριο προγραμματίζει να είναι κλειστό για δύο βδομάδες το καλοκαίρι και θέλει να κρατήσει την αποθήκη του άδεια κατά την περίοδο που θα είναι κλειστό (ώστε να έχει τότε μηδενικό κόστος αποθήκευσης). Υπάρχουν προβλέψεις για την βενζίνη που θα πωληθεί τις επόμενες μέρες  $1, \dots, n$  μέχρι να κλείσει το πρατήριο. Συγκεκριμένα, προβλέπεται ότι θα πωληθούν  $g_i$  γαλόνια βενζίνης κατά την μέρα  $i$ , όπου  $1 \leq i \leq n$ . (Υποθέστε ότι η αποθήκη είναι άδεια κατά την μέρα 0.)

Το υπολογιστικό πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε είναι να προσδιορίσουμε τις παραγγελίες μας (πόσα γαλόνια βενζίνης θα παραγγείλουμε, και πότε) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό μας κόστος. Παρουσιάστε και αναλύστε αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το υπολογιστικό αυτό πρόβλημα. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι πολυωνυμική ως προς τις διάφορες παραμέτρους.