Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Φροντιστήριο:
Κατηγορηματικές Γλώσσες και Μη-Κατηγορηματικές Γλώσσες

4 Απριλίου 2008

Δρ. Παπαδοπούλου Βίκη

$a^K b^{\frac{K}{3}} c^K$

Θεώρημα Άντλησης: Εφαρμογή

- Χρησιμοποιείστε το θεώρημα Άντλησης για κατηγορηματικές γλώσσες για να δείξετε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κατηγορηματικές.

L3 = $\{a^n b^m c^n : 2m \neq 3n\}$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L3 είναι κατηγορηματική. Έστω K η σταθερά του Θεωρήματος Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες.

Κάθε $w \in L1$ έτσι ώστε $|w| \geq K$.

Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες

Η λέξη w μπορεί να γραφτεί ως m = uvxyz,

$|vxy| \leq K$, $vy \neq e$, $|vy| \leq K$ επειδή μπορεί $x = e$, και

$uv^n xy^n z \in L3$ για κάθε $n \geq 0$.

Θεωρούμε την λέξη w = $a^K b^{\frac{K}{3}} c^K$.

Η w ανήκει στην L3 και ικανοποιεί το $|w| \geq K$.

Περίπτωση 1: οι λέξεις v και y περιέχουν μόνο a. Πχ $u = a^{K-i-1-j}$, $v = a^{i}$, $x = a$, $y = a^{j}$ $z = b^{\frac{K}{3}} c^{K}$ όπου $0 < i+j \leq K$.

Τότε όταν τρομπάρουμε την w έτσι ώστε $w = uv^2xy^2z$ τότε θα έχουμε

$$w = a^{K-i-1-j} a^{2i} a a^{2j} b^{\frac{K}{3}} c^{K} = a^{K+i+j} b^{\frac{K}{3}} c^{K}.$$

Για να ανήκει η w στη L3 θα πρέπει $K+i+j = K$.

Άρα θα πρέπει $i+j = 0$. ΑΝΤΙΦΑΣΗ

Περίπτωση 2: οι λέξεις v και y περιέχουν μόνο b. Πχ $u = a^{K}$, $v = b^{i}$, $x = b^{\frac{K}{3}-i-j}$, $y = b^{j}$, $z = c^{K}$ όπου $0 < i+j \leq K$.

Τότε όταν τρομπάρουμε την w έτσι ώστε $w = uv^2xy^2z$ τότε θα έχουμε

$$w = a^{K} b^{2i} b^{\frac{K}{3}-i-j} b^{2j} c^{K} = a^{K} b^{\frac{K}{3}+i+j} c^{K}.$$

Για να ανήκει η w στη L3 θα πρέπει

$$2m \neq 3n \Rightarrow 2K \neq 3\left(\frac{K}{3} + i + j\right) \Rightarrow 2K \neq K + 3i + 3j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3i + 3j \neq K \Rightarrow i + j \neq \frac{K}{3}$$. ΑΝΤΙΦΑΣΗ αφού $0 < i+j \leq K$.

Περίπτωση 3: οι λέξεις v και y περιέχουν μόνο c. Αυτό λύνεται παρόμοια με την Περίπτωση 1.

Περίπτωση 4: οι λέξεις v και y περιέχουν τουλάχιστο ένα a και b.

Πχ $u = a^{K-1}$, $v = ab^{i}$, $x = b^{\frac{K}{3}-i-j}$, $y = b^{j}$ $z = c^{K}$ όπου 0 ≤ i+j <K.

(θα μπορούσε το v να έχει μόνο α και το y να έχει ένα α και τα υπόλοιπα να είναι b.)

Τότε όταν τρομπάρουμε την w έτσι ώστε w = uv^2xy^2z τότε θα έχουμε

$$w = a^{K-1}ab^{j}ab^{j}b^{\frac{K}{3}-i-j}b^{2j}c^{K} = a^{K}b^{i}ab^{\frac{K}{3}+j}c^{K}.$$

Όπου αυτή η λέξη δεν ανήκει στην στη L3. ΑΝΤΙΦΑΣΗ

Περίπτωση 5: οι λέξεις v και y περιέχουν τουλάχιστο ένα b και c. Αυτό λύνεται παρόμοια με την Περίπτωση 4.

2^o Παράδειγμα.

$L_1 = \{a^{n^3} \mid n \geq 0\}$

Λύση: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η (άπειρη) γλώσσα L_1 είναι κατηγορηματική. Έστω M η σταθερά του Θεωρήματος ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες για τη γλώσσα L_1. Θεωρούμε τη λέξη $w = a^{M^3} \in L_1$, και $|w| = M^3 > M$. Έτσι, το Θεώρημα ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες εξασφαλίζει ότι η λέξη w μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες *1*, *2* και *3* του Θεωρήματος 9.1.

Η συνθήκη *1* συνεπάγεται ότι $|vy| > 0$. Η συνθήκη *2* συνεπάγεται ότι $|vy| \leq M$. Η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι η λέξη $uv^2xy^2z = a^{M^3+|vy|} \in L$. Έχουμε ότι $M^3 < M^3 + |vy| \leq M^3 + M < (M+1)^3$. Ετσι, η ποσότητα $M^3 + |vy|$ περιέχεται μεταξύ των διαδοχικών τελείων κύβων M^3 και $(M+1)^3$. Συνεπάγεται ότι αυτή δεν είναι τέλειος κύβος, οπότε $a^{M^3+|vy|} \notin L_1$. Αντίφαση. ♠

3^o Παράδειγμα.

$L_2 = \{a^{3^n} \mid n \geq 0\}$

Λύση: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η (άπειρη) γλώσσα L_2 είναι κατηγορηματική. ΄Εστω M η σταθερά του Θεωρήματος ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες για τη γλώσσα L_2. Θεωρούμε τη λέξη $w = a^{3^M} \in L_2$, με $|w| = 3 > M$. ΄Ετσι, το Θεώρημα ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες εξασφαλίζει ότι η λέξη w μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες *1*, *2* και *3* του Θεωρήματος 9.1.

Η συνθήκη 1 συνεπάγεται ότι $|vy| > 0$. Η συνθήκη *2* συνεπάγεται ότι $|vy| \leq M$. Η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι η λέξη $uv^2xy^2z = a^{3^M + |vy|} \in L$. ΄Εχουμε ότι $3^M < 3^M + |vy| \leq 3^M + M < 3^M + 3^M = 23^M < 3^{M+1}$. Ετσι, η ποσότητα $3^M + |vy|$ περιέχεται μεταξύ των διαδοχικών κυβικών δυνάμεων 3 και 3^{M+1}. Συνεπάγεται ότι αυτή δεν είναι κυβική δύναμη, οπότε $a^{3+|vy|} \notin L_2$. Αντίφαση. ♠

4^o Παράδειγμα.

$L_3 = \{a^{pq} \mid$ οι p και q είναι πρώτοι αριθμοί$\}$

Λύση: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η (άπειρη) γλώσσα L_3 είναι κατηγορηματική. Έστω M η σταθερά του Θεωρήματος ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες για τη γλώσσα L_3. Για οποιουσδήποτε πρώτους αριθμούς p και q όπου $p > M$ και $q > M$, θεωρούμε τη λέξη $w = a^{pq} \in L_3$. Σαφώς, $|w| = pq > M$. Έτσι, το Θεώρημα ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες εξασφαλίζει ότι η λέξη w μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες *1*, *2* και *3* του Θεωρήματος 9.1.

Η συνθήκη *1* συνεπάγεται ότι $|vy| > 0$. Η συνθήκη *2* συνεπάγεται ότι $|vy| \leq M$. Η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι η λέξη $uv^{pq+1}xy^{pq+1}z = a^{pq+pq|vy|} = a^{pq(1+|vy|)} \in L_3$. Αφού $|vy| > 0$, η ποσότητα $pq(1+|vy|)$ δεν είναι το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών. Έπεται ότι $uv^{pq+1}xy^{pq+1}z \notin L_3$. Αντίφαση. ♠

5^o Παράδειγμα.

$L_7 = \{xyx \in \{a,b\}^* \mid |x| \geq 1\}$

Λύση: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η (άπειρη) γλώσσα L_7 είναι κατηγορηματική. Έστω M η σταθερά του Θεωρήματος ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες για τη γλώσσα L_7. Θεωρούμε τη λέξη $w = ab^M a^M b^M \in L_7$ με $|w| = 4M > M$. Έτσι, το Θεώρημα ¶ντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες εξασφαλίζει ότι η λέξη w μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες *1*, *2* και *3* του Θεωρήματος 9.1. Η συνθήκη *1* συνεπάγεται ότι $|vy| > 0$. Η συνθήκη *2* συνεπάγεται ότι $|vy| \leq M$. Διακρίνουμε επτά δυνατές περιπτώσεις. Θα αναλύσουμε μόνο τις δύο.

- Οι λέξεις v και y είναι υπολέξεις της πρώτης εμφάνισης της λέξης a^M στη λέξη w. Τότε, θεωρούμε τη λέξη $uv^2xy^2z = a^{M+|vy|}b^M a^M b^M$. Σαφώς, $uv^2xy^2z \notin L_7$. Η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι $uv^2xy^2z \in L_7$. Αντίφαση.
- Οι λέξεις v και y είναι υπολέξεις της πρώτης εμφάνισης της λέξης $a^M b^M$ στη λέξη w. Τότε, θεωρούμε τη λέξη uv^2xy^2z. Η λέξη αυτή περιέχει περισσότερα από M σύμβολα a πριν από το πρώτο σύμβολο b. Έτσι, δεν μπορεί να είναι της ζητούμενης μορφής και $uv^2xy^2z \notin L_7$. Η συνθήκη *3* συνεπάγεται ότι $uv^2xy^2z \in L_7$. Αντίφαση.

Θεώρημα Άντλησης: Εφαρμογή

Θεώρημα Άντλησης: Εφαρμογή