Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Κεφάλαιο 11. Θεωρία Υπολογισιμότητας

11 Απριλίου 2008

Δρ. Παπαδοπούλου Βίκη

Αναδρομικές Συναρτήσεις

Η μηχανές Turing μπορεί να υπολογίζουν και συναρτήσεις f(w):

- Ορισμός. Έστω $M=(Q, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ και $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ $w \in \Sigma^*_0$.

  Αν η M τερματίζει με είσοδο w και $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w,) \vdash^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}z)$, $z \in \Sigma_0^*$.

  $\Rightarrow z =$ **έξοδος της M με είσοδο w = M(w)**

  (η M(w) ορίζεται μόνο αν η M τερματίσει)

- Έστω συνάρτηση $f : \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_0^*$.

  Η M **υπολογίζει** την f αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$

  - Δηλ. για κάθε $w \in \Sigma_0^*$ η M κάποτε τερματίζει με είσοδο w και η ταινία περιέχει την λέξη $\triangleright\sqcup f(w)$.

- Η συνάρτηση f είναι **αναδρομική** αν υπάρχει μια Turing μηχανή M που υπολογίζει την f.

Παράδειγμα

- Η συνάρτηση $k : \Sigma^* \to \Sigma^*$ η οποία ορίζεται ως $k(w) = w\,w$
- μπορεί να υπολογιστεί από τη μηχανή $CS_{\leftarrow}$
  - C : μηχανή αντιγραφής μιας λέξης w σε $w\sqcup w$

  ακολουθούμενη από

  - $S_{\leftarrow}$: μια μηχανή αριστερής μετατόπισης μιας λέξης $\rhd \sqcup w \sqcup$ σε $\rhd\, w \sqcup$

Αναδρομικές Συναρτήσεις

- Οποιοδήποτε φυσικό αριθμό μπορούμε να τον αναπαραστήσουμε ως $0 \cup 1\ (0 \cup 1)^*$.
- Οι μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από το $\{0,1,\}^*$ στο $\{0,1,\}^*$ είναι μηχανές που υπολογίζουν συναρτήσεις από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς
- Μια τέτοια συνάρτηση f: $\{0,1,\}^* \rightarrow \{0,1,\}^*$ η οποία υπολογίζεται από κάποια μηχανή Μ ονομάζεται αναδρομική.

Κλειστότητα ως προς το Ένωση, Τομή

- Θεώρημα. Το σύνολο των αναδρομικών γλωσσών είναι κλειστό ως προς τις πράξεις
  - ένωση
  - τομή
  - συμπλήρωση
  - σύμπτηξη
  - θήκη Kleene.

Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

- Αν μια μηχανή Turing αποφασίζει μια γλώσσα ή υπολογίζει μια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αλγόριθμος.

- Ορισμός. Έστω $M=(Q, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ και $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ ένα αλφάβητο και $L \subseteq \Sigma^*_0$ μια γλώσσα.

  Η M **ημιαποφασίζει** την L αν για κάθε λέξη $w \in \Sigma^*_0$ αληθεύει το εξής:

  - $w \in L$ ***αν και μόνο*** αν η M **τερματίζει** με είσοδο w.

- Μια γλώσσα L είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν υπάρχει μια μηχανή M που ημιαποφασίζει την L.

Αναδρομικά Αρίθμησες Γλώσσες

⇒ Αν η M έχει είσοδο w∈ L τερματίζει.

⇒ Αν όμως $w \in \Sigma^*_0$-L τότε η M δεν θα εισέλθει ποτέ σε κατάσταση τερματισμού.

- M(w) =↗ : η M αποτυγχάνει να τερματίσει με είσοδο w

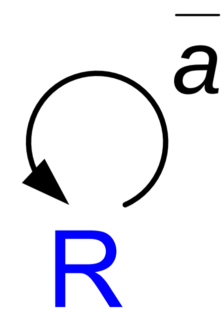
⇒ Αφού από κάθε συνολική κατάσταση παράγεται με άλλη συνολική κατάσταση η μηχανή θα συνεχίζει να υπολογίζει επ' άπειρον.

⇒ Για μια Μηχανή Turing και μια λέξη w ? L δεν μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν έχει τελειώσει με τον υπολογισμό της επειδή αν $w \in \Sigma^*_0$- L δεν θα τερματίσει ποτέ αλλά αυτό (ότι $w \notin L$) δεν το ξέρουμε.

- Ορισμός (ισοδύναμος). Η M **ημιαποφασίζει** την L αν για κάθε λέξη $w \in \Sigma^*_0$, ισχύει ότι M(w) = ↗ αν και μόνο αν η $w \notin L$.

Παράδειγμα

- L={w∈ {a, b}*: η w περιέχει τουλάχιστον ένα a}. Τότε η L ημιαποφασίζεται από τη μηχανή:



- Σαρώνει δεξιά ώσπου να βρει ένα a και τερματίζει.
- Η μηχανή τερματίζει με είσοδο w αν και μόνο αν w∈ L
- Αν η w δεν περιέχει a, η M δεν θα τερματίσει ποτέ.
  - ⇒ Η L είναι αναδρομικά απαριθμήσιμη.

Ορισμοί Δύο Σημαντικών Γλωσσών

- K_0 = {(p(M),x) | η μηχανή Turing M αποδέχεται τη λέξη x}
  - οι λέξεις που κωδικοποιούν μια μηχανή Turing M που αποδέχεται τη λέξη x
  - Γλώσσα Τερματισμού
- K_1 = {x| η λέξη x κωδικοποιεί μια μηχανή Turing M_x που αποδέχεται τη λέξη x}
  - κωδικοποιεί μια μηχανή Turing M_x που αποδέχεται τη λέξη x
  - οι λέξεις που κωδικοποιούν μια μηχανή Turing και γίνονται δεχτές από αυτήν
  - Γλώσσα Αυτοτερματισμού
- Κοινό Χαρακτηριστικό: Αυτοαναφορά
  - K_1 = Η μηχανή M_x δέχεται τη λέξη x, δηλαδή παίρνει τον εαυτό της σαν είσοδο κωδικοποιημένο.

Ιδιότητες Γλωσσών

- Μεταβατικότητα. Για $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$, αν $L_1 \leq L_2$ και $L_2 \leq L_3$ τότε $L_1 \leq L_3$.
- Αναδρομικότητα (αναδρομική απαριθμισιμότητα) Κληρονομεί προς τα Κάτω. Για $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, αν $L_1 \leq L_2$ και η L_2 είναι αναδρομική (αναδρομικά απαριθμίσιμη) τότε και η L_1 είναι αναδρομική (αναδρομικά απαριθμίσιμη).
- **Μη** Αναδρομικότητα (αναδρομική απαριθμισιμότητα) Κληρονομεί προς τα Πάνω. Για $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, αν $L_1 \leq L_2$ και η L_1 είναι μη αναδρομική (αναδρομικά απαριθμίσιμη) τότε και η L_2 είναι μη αναδρομική (αναδρομικά απαριθμίσιμη).
- Συμμετρίας ως προς την συμπλήρωση. Για $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, $L_1 \leq L_2$ αν και μόνο αν $\text{NOT}(L_1) \leq \text{NOT}(L_2)$.

Ιδιότητες

- Συγκρισιμότητα. Δύο γλώσσες $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ είναι συγκρίσιμες όταν ή $L_1 \leq L_2$ ή $L_2 \leq L_1$.
- Μη συγκρισιμότητα. Για $L \subseteq \Sigma^*$ αν η L είναι αναδρομικά αριθμίσιμη αλλά όχι αναδρομική, τότε ούτε $L \leq NOT(L)$ ούτε $NOT(L) \leq L$.

Ισχύει:

- Οποιαδήποτε συναναδρομικά αριθμίσιμη γλώσσα L είναι $L \leq NOT(K_0)$.

1. Κατατάξτε καθεμιά από τις παρακάτω γλώσσες σαν **Α** (αναδρομική), **ΑΑ** (αναδρομικά αριθμήσιμη, αλλά όχι αναδρομική), **ΣΑ** (συναναδρομικά αριθμήσιμη, αλλά όχι αναδρομική), ή **Τ** (ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη). Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

$L_1 = \{\rho(M) \mid$ η γλώσσα $L(M)$ δεν είναι κανονική $\}$

Λύση: Η γλώσσα L_1 δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη (**T**).

- Από την ιδιότητα της μη-αναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω, έπεται ότι για να δείξουμε ότι η L_1 δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{K_0} \leq_m L_1$. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $f : \{\langle \rho(M), x\rangle\} \rightarrow \{\rho(M')\}$ τέτοια ώστε $\langle \rho(M), x\rangle \in \overline{K_0}$ αν και μόνο αν $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_1$ για κάθε $\langle \rho(M), x\rangle \in \{\langle \rho(M), x\rangle\}$. Ορίζουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αναγωγής ως εξής: $f(\langle \rho(M), x\rangle) = \rho(M')$, όπου M' ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

  > ““Για αυθαίρετη λέξη εισόδου w, έλεγξε αν $w \in \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$. Αν όχι, τότε προσομοίωσε τη μηχανή Turing M πάνω στη λέξη x και κάνε ότι και η προσομοίωση. Αλλιώς, τερμάτισε.””

  Προφανώς, η συνάρτηση f είναι αναδρομική. Θα δείξουμε τώρα το ικανό και το αναγκαίο της συνθήκης αναγωγής για τη συνάρτηση f.

Έστω καταρχήν ότι $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$. Δηλαδή, η μηχανή Turing M δεν αποδέχεται την είσοδο x. (Θεωρούμε, ως συνήθως, μόνο τις ορθές κωδικοποιήσεις μηχανών Turing.) Τότε, η μηχανή Turing M', πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, αν $w \notin \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$, δεν αποδέχεται τη λέξη w (αφού η μηχανή Turing M δεν αποδέχεται την είσοδό της x), ενώ αποδέχεται τη λέξη w αν $w \in \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (εξαιτίας, κατευθείαν του προγράμματός της). Επομένως, $L(M') = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$, η οποία δεν είναι κανονική γλώσσα. Έτσι, $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_1$, όπως χρειάζεται.
Έστω τώρα ότι $\langle \rho(M), x\rangle \notin \overline{K_0}$. Τότε, ισοδύναμα, $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$. Δηλαδή, η μηχανή Turing M αποδέχεται την είσοδο x. Τότε, πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, η μηχανή Turing M αποδέχεται τη λέξη w όταν $w \notin \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (αφού η μηχανή Turing M αποδέχεται την είσοδό της x), ενώ επίσης αποδέχεται τη λέξη w όταν $w \notin \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (εξαιτίας, κατευθείαν, του προγράμματός της). Επομένως, $L(M') = \Sigma^*$, η οποία είναι κανονική γλώσσα. Έτσι, $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \notin L_1$, όπως χρειάζεται.
Έχουμε δείξει συνολικά ότι $\langle \rho(M), x\rangle \in \overline{K_0}$ αν και μόνο αν $f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_1$ για αυθαίρετο ζεύγος $\langle \rho(M), x\rangle$, όπου η f είναι συνάρτηση αναδρομική. Έτσι, $\overline{K_0} \leq_m L_1$ και η L_1 δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη.

Από την ιδιότητα της μη-συναναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω, έπεται ότι για να δείξουμε ότι η L_1 δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι $K_0 \leq_m L_1$. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $f : \{\langle \rho(M), x\rangle\} \to \{\rho(M')\}$ τέτοια ώστε $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_1$. Ορίζουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αναγωγής ως εξής: $f(\langle \rho(M), x\rangle) = \rho(M')$, όπου M' ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

> ““Για αυθαίρετη λέξη εισόδου w, έλεγξε αν $w \in \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$. Αν ναι,
>
> προσομοίωσε τη μηχανή Turing M πάνω στη λέξη x και κάνε ότι και η προσομοίωση. Αλλοιώς, τρέξε επ’ άπειρο.””

Προφανώς, η συνάρτηση f είναι αναδρομική. Θα δείξουμε τώρα το ικανό και το αναγκαίο της συνθήκης αναγωγής για τη συνάρτηση f.

Έστω κατ'αρχήν, ότι $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$. Δηλαδή, η μηχανή Turing M αποδέχεται την είσοδο x. Τότε, πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, η μηχανή Turing M' αποδέχεται τη λέξη w αν $w \in \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (αφού η μηχανή Turing M αποδέχεται την είσοδό της x), ενώ τρέχει επ' άπειρο (και δεν αποδέχεται τη λέξη w) όταν $w \notin \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (εξαιτίας, κατευθείαν του προγράμματός της). Επομένως, $L(M') = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$, η οποία δεν είναι κανονική γλώσσα. Έτσι, $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_1$, όπως χρειάζεται.

Έστω τώρα ότι $\langle \rho(M), x\rangle \notin K_0$. Τότε, ισοδύναμα $\langle \rho(M), x\rangle \in \overline{K_0}$. Δηλαδή, η μηχανή Turing M δεν αποδέχεται την είσοδο x. (Θεωρούμε, ως συνήθως, μόνο τις ορθές κωδικοποιήσεις μηχανών Turing.) Τότε, πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, η μηχανή Turing M' δεν αποδέχεται τη λέξη w όταν $w \in \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (αφού η μηχανή Turing M δεν αποδέχεται την είσοδό της x), ενώ τρέχει επ' άπειρο (και δεν αποδέχεται τη λέξη w) όταν $w \notin \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ (εξαιτίας, κατευθείαν, του προγράμματός της). Επομένως, $L(M') = \emptyset$, η οποία είναι κανονική γλώσσα. Έτσι, $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \notin L_1$, όπως χρειάζεται.

Έχουμε δείξει συνολικά ότι $\langle \rho(M), x \rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $f(\langle \rho(M), x \rangle) \in L_1$ για αυθαίρετο ζεύγος $\langle \rho(M), x \rangle$, όπου η f είναι συνάρτηση αναδρομική. Έτσι, $K_0 \leq_m L_1$ και η L_1 δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη.

$L_4 = \{\rho(M) \mid$ υπάρχει κατηγορηματική γλώσσα L τέτοια ώστε $L \subset L(M)\}$

Λύση: Αν υπάρχει κατηγορηματική γλώσσα $L \subset L(M)$, τότε $L = \emptyset$ ή $L \neq \emptyset$. Στη δεύτερη περίπτωση $\emptyset \subset L \subset L(M)$, οπότε $\emptyset \subset L(M)$. ¶ρα $L(M) \neq \emptyset$. ´Εστω ότι $L(M) \neq \emptyset$. Τότε, $\emptyset \subset L(M)$. ¶ρα $L_4 = \{\rho(M) \mid L(M) \neq \emptyset\}$.

Η γλώσσα L_4 είναι αναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι συναναδρομικά αριθμήσιμη (**ΑΑ**).

- Για να δείξουμε ότι η L_4 είναι αναδρομικά αριθμήσιμη αρκεί να δείξουμε μηχανή Turing M' που την αναγνωρίζει:

  """Με dovetailing προσομοίωσε τη παράλληλη εκτέλεση της μηχανής Turing M πάνω σε κάθε λέξη του Σ^*. Αν οποιαδήποτε εκτέλεση τερματίσει, τότε τερματίζει και η M'."""

  Θα δείξουμε τώρα ότι $L_4 = L(M')$:
  ´Εστω ότι $\rho(M) \in L_4$. Τότε η μηχανή Turing M τερματίζει πάνω σε κάποια λέξη w και $L(M) \neq \emptyset$. Με είσοδο $\rho(M)$, η προσομοίωση της μηχανής Turing M πάνω στη λέξη w τερματίζει κι έτσι τερματίζει κι η M'. Συνεπώς, $\rho(M) \in L(M')$ και $L_4 \subseteq L(M')$.

Έστω ότι $\rho(M) \in L(M')$. Τότε η M' τερματίζει όταν δέχεται την είσοδο $\rho(M)$. Η M' τερματίζει μόνο εάν η M τερματίζει πάνω σε κάποια λέξη w (εξαιτίας, κατευθείαν του προγράμματος της). Έτσι $w \in L(M)$ και $L(M) \neq \emptyset$. Αφού η $L(M)$ είναι μη-κενή, τότε $\rho(M) \in L_4$ και $L(') \subseteq L_4$.
Από την ιδιότητα συνόλων του αμοιβαίου εγκλεισμού, έπεται ότι $L(M') = L_4$. Έτσι η L_4 είναι αναδρομικά αριθμήσιμη.

- Από την ιδιότητα της μη-συναναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω, έπεται ότι για να δείξουμε ότι η L_4 δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{K_0} \leq_m L_4$. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει αναδρομική συνάρτηση

$f : \{\langle \rho(M), x\rangle\} \rightarrow \{\rho(M')\}$ τέτοια ώστε $\langle \rho(M), x\rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_4$. Ορίζουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αναγωγής ως εξής: $f(\langle \rho(M), x\rangle) = \rho(M')$, όπου M' ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

> ““Πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, προσομοίωσε τη μηχανή Turing M πάνω στην είσοδο x και κάνε ότι και η προσομοίωση.””

Προφανώς, η συνάρτηση f είναι αναδρομική. Θα δείξουμε τώρα το ικανό και το αναγκαίο της ζητούμενης συνθήκης.

Έστω κατ'αρχήν, ότι $\langle \rho(M), x \rangle \in K_0$. Δηλαδή, η μηχανή Turing M αποδέχεται την είσοδο x. Τότε, πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, η μηχανή Turing M' αποδέχεται τη λέξη w (αφού η μηχανή Turing M αποδέχεται την είσοδό της x, εξαιτίας, κατευθείαν του προγράμματός της). Επομένως, $L(M') \neq \emptyset$. Έτσι, $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x \rangle) \in L_4$, όπως χρειάζεται.

Έστω τώρα ότι $\langle \rho(M), x \rangle \notin K_0$. Τότε, ισοδύναμα $\langle \rho(M), x \rangle \in \overline{K_0}$. Δηλαδή, η μηχανή Turing M δεν αποδέχεται την είσοδο x. (Θεωρούμε, ως συνήθως, μόνο τις ορθές κωδικοποιήσεις μηχανών Turing.) Τότε, πάνω σε αυθαίρετη είσοδο w, η μηχανή Turing M' δεν αποδέχεται τη λέξη w (αφού η μηχανή Turing M δεν αποδέχεται την είσοδό της x, εξαιτίας, κατευθείαν, του προγράμματός της). Επομένως, $L(M') = \emptyset$. Έτσι, $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x \rangle) \notin L_4$, όπως χρειάζεται.

Έχουμε δείξει συνολικά ότι $\langle \rho(M), x \rangle \in K_0$ αν και μόνο αν $f(\langle \rho(M), x \rangle) \in L_4$ για αυθαίρετο ζεύγος $\langle \rho(M), x \rangle$, όπου η f είναι συνάρτηση αναδρομική. Έτσι, $K_0 \leq_m L_4$ και η L_4 δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη.

Λύση: Η γλώσσα L_{11} δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη (Τ).

- Από την ιδιότητα της μη-αναδρομικής αριθμησιμότητας προς τα πάνω, έπεται ότι για να δείξουμε ότι η L_{11} δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{K_0} \leq_m L_{11}$. Θα δείξουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $f : \{\langle \rho(M), x\rangle\} \rightarrow \{\rho(M')\}$ τέτοια ώστε $\langle \rho(M), x\rangle \in \overline{K_0}$ αν και μόνο αν $\rho(M') = f(\langle \rho(M), x\rangle) \in L_{11}$ για κάθε $\langle \rho(M), x\rangle \in \{\langle \rho(M), x\rangle\}$. Ορίζουμε τη ζητούμενη συνάρτηση αναγωγής ως εξής: $f(\langle \rho(M), x\rangle) = \rho(M')$, όπου M' ορίζεται ως η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

  > ""Για αυθαίρετη λέξη εισόδου w, τρέξε παράλληλα την M_w πάνω στην w και την M πάνω στη x. Αν η M_w ή η M τερματίσει και αποδεκτεί την λέξη εισόδου της, τότε τερμάτισε.""

  Προφανώς, η συνάρτηση f είναι αναδρομική. Θα δείξουμε τώρα το ικανό και το αναγκαίο της συνθήκης αναγωγής για τη συνάρτηση f.