Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Φροντιστήριο:
Αυτόματα Στοίβας και Κατηγορηματικές Γλώσσες

28 Μαρτίου 2008

Δρ. Παπαδοπούλου Βίκη

1. Κατασκευή αυτόματου στοίβας μιας γλώσσας που δίνεται με λεκτική περιγραφή

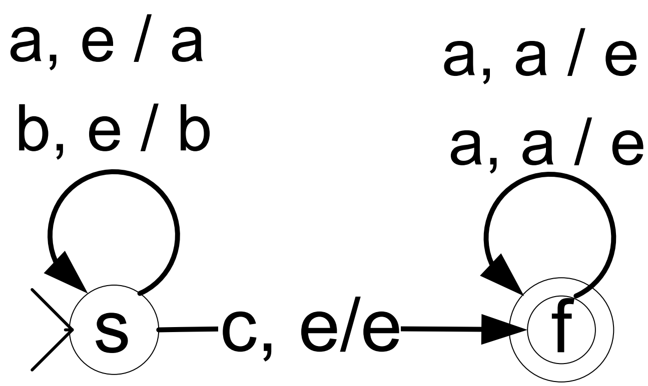
- Σχεδιάστε ένα αυτόματο στοίβας για τη γλώσσα που δέχεται τις λέξεις $w \in \{a,b\}^*$ με ίσο αριθμό a και b.
  - Χρησιμοποιούμε ένα ειδικό σύμβολο c ως ένδειξης τέλους για τη στοίβα.
    - Π.χ. (s, e, e) = (q, c)
  - Στη στοίβα καταχωρούμε ότι την περίσσια από a ή b που είδαμε μέχρι τώρα.

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, $Q=\{s,q,f\}$, $\Gamma=\{a,b,c\}$, $F = \{f\}$

1. ((s, ε, ε) , (q, c))
2. ((q, a, c) , (q, ac))
3. ((q, a, a) , (q, aa))
4. ((q, a, b) , (q, ε))
5. ((q, b, c) , (q, bc))
6. ((q, b, b) , (q, bb))
7. ((q, b, a) , (q, ε))
8. ((q, ε, c) , (f, ε))

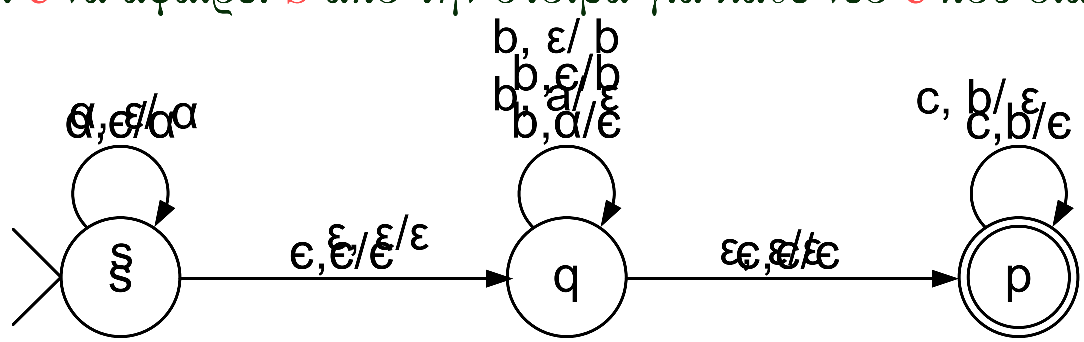
Παράδειγμα συνέχεια

- Σχεδιάστε το αυτόματο στοίβας για τη γλώσσα του προηγούμενου παραδείγματος.
  - x, y/ z = όταν διαβάσει το σύμβολο x και στην κορυφή της στοίβας είναι το y, το αντικαθιστά με το z.



2. Κατασκευή αυτόματου στοίβας μιας γλώσσας που δίνεται με λεκτική περιγραφή

- Κατασκευάστε ένα αυτόματο στοίβας για τη γλώσσα $\{a^i b^j c^k : i,j,k \geq 0, i+k=j\}$
  - Διαφορετικές καταστάσεις για τον έλεγχο διαδοχής συμβόλων a, b, c
  - Χρησιμοποιούμε τη στοίβα για να ελέγχουμε αν i+k=j
  - Πρέπει να διαβάσει αρχικά a και να θυμάται πόσα a διάβασε.
  - Όταν διαβάσει το πρώτο b να βγάζει a από την στοίβα για κάθε b που διαβάζει
  - Αν έχει και άλλα b να διαβάσει και η στοίβα είναι άδεια, να προσθέσει b για κάθε νέο b που διαβάζει.
  - Όταν διαβάσει c να αφαιρεί b από την στοίβα για κάθε νέο c που διαβάζει.



Θεώρημα άντλησης για κατηγορηματικές (ισχυρή μορφή)

- **Θεώρημα 2 (άντλησης για κατηγορηματικές).**
  Έστω G=(V, Σ, R, S) μια γ.χ.σ.. Υπάρχει μια σταθερά M_L, τέτοια ώστε για κάθε συμβολοσειρά $w \in L(G)$ με $|w| \geq M_L$ μπορεί να ξαναγραφτεί ως $w = u\mathbf{v}x\mathbf{y}z$ με τρόπο ώστε
  - είτε $v \neq \varepsilon$ είτε $y \neq \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $vy \neq \varepsilon$
  - $|vxy| \leq M_L$ και
  - $u\,\mathbf{v}^n\,x\,\mathbf{y}^n\,z \in L(G)$ για κάθε $n \geq 0$.

Θεώρημα Άντλησης: Εφαρμογή

- Χρησιμοποιείστε το θεώρημα Άντλησης για κατηγορηματικές γλώσσες για να δείξετε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κατηγορηματικές.

a) L1= $\{a^{n^2} : n \geq 0\}$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L1 είναι κατηγορηματική.

Έστω K η σταθερά του Θεωρήματος Άντλησης για Κατηγ. Γλώσσες.

Θεωρούμε την w = $a^{K^2} \in L$ με $|w| = K^2 > K$.

Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες:

η λέξη w μπορεί να γραφτεί ως w = uvxyz

Εάν $|v| + |y| = k$, τότε $|v| + |y| \geq 1$.

$\Rightarrow$ Αν τρομπάρουμε την w = uv^2xy^2z

=> $|w| = K^2 + k$, όπου $0 < k \leq K$.

$\Leftrightarrow$ $K^2 < K^2 + k$ $K(K+1) < (K+1)^2$.

Αφού $K^2 < |w| = K^2 + k < K^2$, η λέξη δεν ανήκει στη Γλώσσα L1(αντίφαση).

Θεώρημα Άντλησης: Εφαρμογή

β) $L2 = \{ww : w \in \{a,b\}^*\}$

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L2 είναι κατηγορηματική.

Έστω K η σταθερά του Θεωρήματος Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες.

Κάθε $m \in L$ έτσι ώστε $|m| \geq K$, και υπάρχουν $u,v,x,y,z \in \{a,b\}^*$.

Έτσι το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες εξασφαλίζει ότι η λέξη m μπορεί να γραφτεί ως $m = uvxyz$, $|vxy| \leq K$, $vy \neq e$, και $uv^n xy^n z \in L2$ για κάθε $n \geq 0$.

Θεωρούμε την λέξη $m = a^K b\, a^K b\, a^K b$.

Αυτή η λέξη ανήκει στην L2 και ικανοποιεί το $|m| \geq K$.

Από την υπόθεσή μας έχουμε τις λέξεις u,v,x,y,z .

Το v,y δεν περιέχουν περισσότερο από ένα b, αυτό προκύπτει από το ότι $|vxy| \leq K$ άρα $|v|, |y| \leq K$, έτσι το καθένα δεν μπορεί να περιέχει περισσότερο από ένα b.

Θεώρημα Άντλησης: Εφαρμογή

Περίπτωση 1: Το v περιέχει ένα b, πχ $u = a^{K-i}$, $v = a^i b$, $x = a^{K-j}$, $y = a^j$, $z = ba^K b$ όπου $i < K$ και $j \le K$.

Τότε όταν τρομπάρουμε την m έτσι ώστε $m = uv^2xy^2z$ τότε θα έχουμε
$m = a^{K-i}\, a^i b a^i b\, a^{K-j}\, a^{2j}\, ba^K b = a^K b a^i b\, a^{K+j}\, ba^K b$.
Παρατηρούμε ότι αυτή η λέξη δεν ανήκει στην γλώσσα L2, αφού έχουμε 4 b.

Περίπτωση 2: Και το v και το y περιέχουν b, πχ $u = a^{K-i}$, $v = a^i b$, $x = a^{K-j}$, $y = a^j b$, $z = a^K b$ όπου $i < K$ και $j < K$.

Τότε όταν τρομπάρουμε την m έτσι ώστε $m = uv^2xy^2z$ τότε θα έχουμε
$m = a^{K-i}\, a^i b a^i b\, a^{K-j}\, a^j b a^j b\, a^K b = a^K b a^i b\, a^K b a^j b\, a^K b$.
παρατηρούμε ότι αυτή η λέξη δεν ανήκει στην γλώσσα L2, αφού έχουμε 5 b.

Περίπτωση 3: Και το v και το y δεν περιέχουν b, πχ $u = a^{K-i}$, $v = a^{i}$, $x = ba^{K-j}$, $y = a^{j}$, $z = ba^{K}b$ όπου $i \le K$ και $j \le K$.

Τότε όταν τρομπάρουμε την m έτσι ώστε $m = uv^2xy^2z$.

Τότε θα έχουμε $m = a^{K-i}\, a^{2i}\, ba^{K-j}\, a^{2j}\, b\, a^{K}b = a^{K+i}\, ba^{K+j}\, b\, a^{K}b$.

Αφού όπως έχουμε αναφέρει πιο πάνω $vy \neq e$ άρα είτε το i είτε το j δεν πρέπει να είναι 0, τότε τα a είτε στην πρώτη επανάληψη της λέξεις w, είτε στην δεύτερη επανάληψη θα είναι άνισα με τα a της τρίτης επανάληψης της λέξης w. Άρα η λέξη m δεν ανήκει στην Γλώσσα L2.

Αφού έχουμε ελέγξει όλες τις δυνατές περιπτώσεις, συμπεραίνουμε ότι η Γλώσσα L2 δεν είναι κατηγορηματική επειδή εφαρμόζοντας το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες έχουμε φτάσει σε Αντίφαση.