Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

8ο Φροντιστήριο: Μη Υπολογισιμότητα και Κλάση NP

18 Απριλίου 2008

Δρ. Παπαδοπούλου Βίκη

Λειτουργία ΜΜΤ

- Ορισμός. Για μια ΜΜΤ Μ, L(M) να είναι το σύνολο όλων των λέξεων που δέχεται η Μ.
- Στάδιο Εικασίας (μαντέματος, guessing)
  - **Μαντεύει** ποια είναι η κατάλληλη μεταβίβαση για την είσοδο που έχει και την εκτελεί.
- Στάδιο επαλήθευσης:
  - **Ελέγχει ντετερμινιστικά** αν το μάντεμα ήταν σωστό για την είσοδο που έχει.

Ικανοποιησιμότητα Τύπων Bool

Ορισμός. **Τύπος Bool**

- **$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$: Δυαδικές Μεταβλητές Bool**
- $\overline{X} = \{\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}\}$ **: αρνήσεις των** $x_1 \cdots, x_n$ ή literals
- **Συνθήκη** $C \subseteq X \cup \overline{X}$ $= (x_i \vee \cdots \vee x_j) = (x_i, \cdots, x_j)$

  $= x_1$ ή … ή x_j (x_i : **στοιχεία** της **C**)
- **Τύπος Bool** σε κανονική διαζευκτική μορφή**:**
  - **F** $= \{C_1, \cdots, C_m\} = C_1$ και C_2 … και C_m
- Παράδειγμα.
  - $X = \{x_1, x_2, x_3\}, \overline{X} = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\}$

    $F = \{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3), (\overline{x_1}), (x_1 \vee \overline{x_2})\}$

Προβλήματα που ανήκουν στην κλάση NP

Παράδειγμα 1. Το πρόβλημα SAT ανήκει στην κλάση NP.

Απόδειξη.

- Σχεδιάζουμε μια ΜΜΤ M η οποία αποφασίζει σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο για οποιαδήποτε στιγμιότυπο I=(X,F) του προβλήματος SAT εάν είναι ικανοποιήσιμο.
  - **1η φάση.** Έστω F το στιγμιότυπο του SAT στην είσοδο της μηχανής. Μετρά τις μεταβλητές του F (=n) και γράφει σε μια δεύτερη ταινία τη λέξη $\triangleright I^n$.
  - **2η φάση (Μη-ντετερμινιστική φάση).** Μη ντετερμινιστικά (μαντεύοντας), αντικαθιστά τη λέξη $\triangleright I^n$ με μια λέξη $w' \in \{\top, \bot\}$.
  - **3η φάση (Ντετερμινιστική φάση).** Ελέγχει εάν w' ικανοποιεί την F.
- Ο αλγόριθμος τρέχει σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο. Γιατί?

Παράδειγμα 2.

- Να δείξετε ότι το πρόβλημα του πλανώδιου πωλητή ανήκει στην κλάση NP.

Απόδειξη.

- Είσοδος: I= (D, B) πίνακας n× n, στοιχεία : d_{ij}
- Μάντεμα (μη ντετερμινιστική φάση): Μαντεύει μια λύση για το I: H MMT γράφει σε μια $2^{η}$ ταινία μια συμβολοσειρά από 0, 1 και ⊔ μήκους |I|.
- Έλεγχος (ντετερμινιστική φάση):
  1. Ελέγχει αν η λέξη που έγραψε είναι μια δυαδική κωδικοποίηση μιας μετάθεσης n αριθμών διαχωρισμένων με ένα κενό, δηλ. της μορφής $\pi(1) \sqcup \pi(2) \cdots \sqcup \pi(n)$.
     A. Εάν ναι, τότε υπολογίζει το κόστος της μετάθεσης π, c(π) με βάση των πίνακα με τα κόστη διαδρομών D.
        a) Εάν $c(\pi) \leq B$ αποφασίζει YES.
  2. Αλλιώς αποφασίζει NO.
- Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται σε πολυωνυμικό μη ντετερμινιστικό χρόνο.

Αποδείξτε ότι η παρακάτω γλώσσα είναι μη-επιλύσιμη (δηλ. μη αναδρομική): $L = \{p(M) \mid$ η μηχανή Turing M τερματίζει με είσοδο κενή ταινία$\}$.

Αναγάγουμε την K_0 που γνωρίζουμε ότι είναι μη-αναδρομική στην γλώσσα:

L = {p(M)| η μηχανή Turing M τερματίζει με είσοδο κενή ταινία;}

Δοσμένης της περιγραφής μιας Μηχανής Turing και εισόδου x ορίζουμε μια αναδρομική συνάρτηση τ(x) για την οποία $x \in K_0$ εάν και μόνο αν $\tau(x) \in L$.

Η τ(x) υπολογίζει μια μηχανή Turing M_x η οποία λειτουργεί ως ακολούθως :

1. Η M_x, όταν αρχίζει σε μια κενή ταινία (δηλαδή βρίσκεται στην κατάσταση $(s, \triangleright \underline{\sqcup})$),
2. γράφει x στην ταινία και
3. μετά αρχίζει να εξομοιώνει την M.

(Με άλλα λόγια, εάν $x = a_1 \ldots a_n$, τότε M_x είναι απλά η μηχανή $Ra_1Ra_2\ldots Ra_nL_\sqcup M$. Παρατηρείστε ότι η τ (x) μπορεί να υπολογιστεί πάντα, δηλαδή είναι αναδρομική.)

Τώρα η M_x είναι η είσοδος της γλώσσας L.

Από την κατασκευή της, η M_x τερματίζει αν και μόνο αν $x \in K_0$.

Συμπεραίνουμε ότι $x \in K_0$ εάν και μόνο αν $\tau(x)$ $(= M_x) \in L$, όπως απαιτείται για την τ().