Αριστείδου Αριστείδης | ΑΤ. 600822

Τελική Εξέταση

- Απαντείστε *όλες* τις ερωτήσεις που ακολουθούν. Ο συνολικός αριθμός μονάδων είναι **100**. Η διάρκεια της εξέτασης είναι **δύο** ώρες και **15** λεπτά.

---

1. Θεωρούμε την γλώσσα

$$L = \{0x01y1 \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ και } |x| = |y|\}.$$

(α) **(17 μονάδες)** Χρησιμοποιείστε κατάλληλο θεώρημα άντλησης για να δείξετε ότι η L *δεν* είναι κανονική. Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η L είναι κανονική. Έστω K η σταθερά του Θ. Άντλησης (ισχυρής μορφή) για κανονικές γλώσσες για την L. Επιλέγω τη λέξη $w = 00^K011^K1$, με $|w| = 2K+4 > K$. Από Θ. Άντλησης, $w = xyz$, όπου $x = 0^i$, $y = 0^j$ με $j > 0$ και $i+j \leq K$, και $xy^nz \in L$ $\forall n \geq 0$. Επιλέγουμε $n=2$ και θεωρούμε τη λέξη $xy^2z = 0^i0^{2j}0^{K+1-i-j}011^K1 = 00^{K+j}011^K1$. Αφού $K+j > K$ (καθώς $j>0$), $xy^2z \notin L$. Αντίφαση.

(β) **(15 μονάδες)** Κατασκευάστε κατηγορηματική γραμματική η οποία παράγει την γλώσσα L.

$S \rightarrow 0A1$

$A \rightarrow 0A1 \mid 1A0 \mid 0A0 \mid 1A1 \mid 01$

2. **(13 μονάδες)** Παρουσιάστε δύο κατηγορηματικές γλώσσες L_1 και L_2 τέτοιες ώστε *(ι)* καμιά από αυτές δεν είναι κανονική, και *(ιι)* οι γλώσσες $L_1 \cap L_2$ και $L_1 \cup L_2$ είναι και οι δύο κανονικές.

$$L_1 = \{ a^i b^j \mid i < j \}$$
$$L_2 = \{ a^i b^j \mid i \geq j \}$$

Προσέξτε ότι $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ και $L_1 \cup L_2 = \{a\}^*\{b\}^*$, που είναι και οι δύο κανονικές.

3. **(15 μονάδες)** Θεωρούμε την γλώσσα

$$L \;=\; \{a^i b^i a^i b^i \mid i \geq 0\}\,.$$

Περιγράψτε (με όση μεγαλύτερη ακρίβεια και σαφήνεια μπορείτε) απλ**ό** αυτόματο με δύο στοίβες το οποίο δέχεται την γλώσσα L.

Διαβάζουμε πρώτα την πρώτη σειρά των a και την αντιγράφουμε και στις δύο στοίβες. Έτσι, θα έχουμε a^i και στις δύο στοίβας. Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση. Μετά, διαβάζουμε την πρώτη σειρά των b, και για κάθε b που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα a από την πρώτη στοίβα. (Στη σωστή περίπτωση, προσέξτε ότι η πρώτη στοίβα έχει αδειάσει.) Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση. Διαβάζουμε μετά την δεύτερη σειρά των a και την αντιγράφουμε στην ~~δεύτερη~~ πρώτη στοίβα. Μη ντετερμινιστικά, αλλάζουμε κατάσταση. Τέλος, διαβάζουμε τη δεύτερη σειρά των b, και για κάθε b που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα a από κάθε στοίβα ταυτόχρονα.

4. **(15 μονάδες)** Χρησιμοποιείστε κατάλληλο θεώρημα άντλησης (και/ή κατάλληλες ιδιότητες θήκης) για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L = \{(a^i b^j)^k \mid i, j, k \geq 0\}$$

δεν είναι κατηγορηματική.

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η L είναι κατηγορηματική. Τότε, επίσης κατηγορηματική είναι και η γλώσσα $L' = L \cap \{a\}^*\{b\}^*\{a\}^*\{b\}^* = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$.
(ισχυρή μορφή)
Έστω, p η σταθερά του Θ. Άντλησης για κατηγορηματικές γλώσσες για τη γλώσσα L'. Επιλέγουμε $w = a^p b^p a^p b^p$.
Πρέπει να είναι $w = uvxyz$ με (i) $|vy| > 0$, (ii) $|vxy| \leq p$ και (iii) $uv^n xy^n z \in L'$ $\forall$ $n \geq 0$.

Αφού $|vxy| \leq p$, η vxy δεν μπορεί να καλύπτει περισσότερα από δύο είδη συμβόλων. Η συνθήκη (iii) συνεπάγεται ότι και η v και η y περιέχουν μόνο ένα είδος συμβόλων η κάθε μιά — αλλοιώς, $uv^2xy^2z \notin L'$, διότι υπάρχουν υπερβολικά πολλές εναλλαγές συμβόλων στην L'. Συνεπάγεται ότι έχουμε να εξετάσουμε τις εξής περιπτώσεις μόνο (χωρίς απώλεια της γενικότητας):

(1) $u = a^i$, $v = a^j$, $x = a^k$, $y = a^l$, $z = a^{p-i-j-k-l} b^p a^p b^p$ με $j+l > 0$.
(δηλαδή, τα v και y βρίσκονται μέσα στο ίδιο block συμβόλων). Τότε, $uv^2xy^2z = a^{p+j+l} b^p a^p b^p$. Αφού, $j+l > 0$, $p+j+l > p$. Έτσι, $a^{p+j+l} b^p a^p b^p \notin L'$. Αντίφαση.

(2) $u = a^i$, $v = a^j$, $x = a^{p-i-j} b^k$, $y = b^l$, $z = b^{p-k-l} a^p b^p$.

(δηλαδή, τα v και y βρίσκονται μέσα σε διαφορετικά block συμβόλων). Τότε, $uv^2xy^2z = a^{p+j} b^{p+l} a^p b^p$.
Αφού $j+l > 0$, είτε $j > 0$ είτε $l > 0$. Άρα, είτε $p+j > p$ είτε $p+l > p$. Έτσι, $a^{p+j} b^{p+l} a^p b^p \notin L'$. Αντίφαση.

5. **(25 μονάδες)** Θεωρούμε την γλώσσα

$$L \quad = \quad \{\rho(M) \mid \; 00 \in L(M) \text{ αν και μόνο αν } 11 \in L(M)\},$$

όπου, ως συνήθως, $\rho(M)$ συμβολίζει κωδικοποίηση της μηχανής Turing M. Κατατάξτε την L ως **Α** (αναδρομική), **ΑΑ** (αναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι αναδρομική), **ΣΑ** (συναναδρομικά αριθμήσιμη αλλά όχι αναδρομική) ή **Τ** (ούτε αναδρομικά αριθμήσιμη, ούτε συναναδρομικά αριθμήσιμη). Αποδείξτε την απάντησή σας.

Η γλώσσα L είναι Τ.

<u>Απόδειξη ότι δεν είναι αναδρομικά αριθμήσιμη:</u>

Αναγωγή από την $\overline{K_0}$:

Συνάρτηση αναγωγής $f: \{\langle\rho(M), x\rangle\} \to \{\rho(M')\}$, όπου:

Για δεδομένο $\langle\rho(M), x\rangle$, η μηχανή Turing M' έχει το εξής πρόγραμμα:

"Πάνω σε είσοδο w, αν $w = 00$, τότε τρέξε επ'άπειρο. Αν $w = 11$, τότε προσομοίωσε την M πάνω στη x και ακολούθησε την προσομοίωση. Αλλιώς ($w \notin \{00, 11\}$), κάνε οτιδήποτε."

<u>Απόδειξη ότι δεν είναι συναναδρομικά αριθμήσιμη:</u>

Αναγωγή από την K_0:

Συνάρτηση αναγωγής $f: \{\langle\rho(M), x\rangle\} \to \{\rho(M')\}$, όπου:

Για δεδομένο $\langle\rho(M), x\rangle$, η μηχανή Turing M' έχει το εξής πρόγραμμα:

"Πάνω σε είσοδο w, αν $w = 00$, τότε τερμάτισε (και αποδέξου). Αν $w = 11$, τότε προσομοίωσε την M πάνω στη x και ακολούθησε την προσομοίωση. Αλλιώς, ($w \notin \{00, 11\}$), κάνε οτιδήποτε."

(Παραλείπονται οι αποδείξεις ότι κάθε f είναι συνάρτηση αναγωγής.)