ΕΠΛ 211

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΣΕΙΡΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

[a] $L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* : \#_b(w) = 2\#_a(w) \}$

$$
\begin{aligned}
G_1 = (\, & \{S, A, B, a, b\}, \{a, b\}, \\
& \{ S \rightarrow ABB \mid BAB \mid BBA \mid e \\
& \ \ A \rightarrow AS \mid SA \mid a \\
& \ \ B \rightarrow BS \mid SB \mid b \}, S)
\end{aligned}
$$

[β] $G_2 = (\{S, a, b, (,), \cup, *, \phi\}, \{a, b, (,), \cup, *,$
$\{ S \rightarrow (SS) \mid (S \cup S) \mid S^* \mid a \mid b \mid \phi$
S
$)$

[γ] $G_3 = (\{S, a, b\}, \{a, b\},$
$\{S \rightarrow aSb \mid aaSb \mid e\}, S)$

[δ] $L_4 = \{ a^m b^n c^p d^q : m+n = p+q \}$

$G_4 = (\{ S, X, Y, Z, a, b, c, d \}, \{ a, b, c, d \},$
$\{ S \to aSd \mid X \mid Y \mid Z$
$X \to aXc \mid Z$
$Y \to bYd \mid Z$
$Z \to bZc \mid e \}, S$

ΑΣΚΗΣΗ 2

[β] $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \Delta_1, S_1, F_1)$

$K_1 = \{1, 2\}$

$\Sigma_1 = \{a, b\}$

$\Gamma_1 = \{a, b\}$

$S_1 = 1$

$F_1 = \{2\}$

$$\Delta_1 = \{((1,a,e),(1,a)),\\ ((1,b,e),(1,b)),\\ ((1,e,e),(2,e)),\\ ((1,a,e),(2,e)),\\ ((1,b,e),(2,e)),\\ ((2,a,a),(2,e)),\\ ((2,b,b),(2,e))\}$$

Απόδειξη ορθότητας : μέ έπαγωγή (παραλείπεται)

[α] Η γλώσσα παράγεται ἀπό τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα : $G_2 = (\{S, a, b\}, \{a, b\}, \{S \to aSb \mid aSbb \mid e\}, S)$

Μετατρέπουμε τήν παραπάνω γραμματική σέ αὐτόματο M_3 μέ στοίβα, όπως στό Θεώρημα πού δείχνει ότι κάθε γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα γίνεται δεκτή ἀπό ένα αὐτόματο μέ στοίβα :

$M_2 = (K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \Delta_2, S_2, F_2)$

$K_2 = \{p, q\}$

$\Sigma_2 = \{a, b\}$

$\Gamma_2 = \{S, a, b\}$

$S_2 = p$

$$F_2 = \{q\}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = \{ & ((p, e, e), (q, S)),\\ & ((q, e, S), (q, aSb)),\\ & ((q, e, S), (q, aSbb)),\\ & ((q, e, S), (q, e)),\\ & ((q, a, a), (q, e)),\\ & ((q, b, b), (q, e))\\ \}\end{aligned}$$

Ἡ ὀρθότητα ἔπεται ἀπό τό ὅτι τό M_2 κατασκευάστηκε ὅπως στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τό ὁποῖο ἐγγυᾶται ὅτι $L(M_2) = L(G_2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

[α] $L_1 = \{a^m b^n c^p : m = n \text{ ή } n = p \text{ ή } m = p\}$

Προσέξτε ότι:

$$L_1 = \{a^m b^m c^p : m \geq 0,\ p \geq 0\} \cup \{a^m b^n c^n : m \geq 0,\ n \geq 0\} \cup \{a^m b^n c^m : m \geq 0,\ n \geq 0\}$$

- Έστω $L_{11} = \{a^m b^m c^p : m \geq 0,\ p \geq 0\}$

  Η L_{11} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα:

  $$G_{11} = (\{S, T, C, a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{S \to TC,\ T \to aTb \mid e,\ C \to c \mid e\}, S)$$

- Έστω $L_{12} = \{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$

  Η L_{12} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα:

  $$G_{12} = (\{S, T, A, a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{S \to AT,\ A \to a \mid e,\ T \to bTc \mid e\}, S)$$

- Έστω $L_{13} = \{a^m b^n c^m : m \geq 0,\ n \geq 0\}$

  Η L_{13} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα:

  $$G_{13} = (\{S, T, a, b, c\}, \{a, b, c\}, \{S \to aSc \mid T,\ T \to bT \mid e\}, S)$$

Αφού $L_1 = L_{11} \cup L_{12} \cup L_{13}$, και το σύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστό κάτω από την πράξη της ένωσης, έπεται ότι η L_1 είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

[β] $L_2 = \{a^m b^n c^p : m \neq n$ ή $n \neq p$ ή $m \neq p\}$
(Προσέξτε τυπογραφικό λάθος.)

$L_2 = \{a^m b^n c^p : m < n$ ή $m > n$ ή $n < p$ ή $n > p$
ή $m < p$ ή $m > p\}$

$$
\begin{aligned}
L_2 = \; & \{a^m b^n c^p : m < n\} \cup \\
& \{a^m b^n c^p : m > n\} \cup \\
& \{a^m b^n c^p : n < p\} \cup \\
& \{a^m b^n c^p : n > p\} \cup \\
& \{a^m b^n c^p : m < p\} \cup \\
& \{a^m b^n c^p : m > p\}
\end{aligned}
$$

Η γλώσσα $\{a^m b^n c^p : m < n\}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα αφού παράγεται από τη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα $(\{S, T, U, C, a, b, c\}, \{a, b, c\},$
$\{S \rightarrow TC,\ T \rightarrow Tb \mid U,\ U \rightarrow aUb \mid e,$
$C \rightarrow c \mid e\}, S)$

Όμοια, μπορούμε να βρούμε γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για κάθε μια από τις υπόλοιπες 5 γλώσσες.

Αφού το σύνολο των ΓΧΣ είναι κλειστό κάτω από την πράξη της ένωσης, έπεται ότι η L_2 είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

[γ] Τό κανονικό παράδειγμα για γλώσσα πού δέν είναι χωρίς συμφραζόμενα.

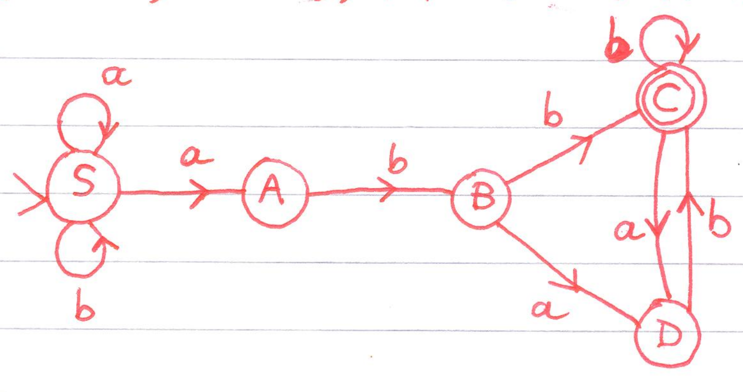
ΑΣΚΗΣΗ 5

Μιά προσεκτική παρατήρηση τών κανόνων τής γραμματικής δείχνει ότι:

- τό (μή τελικό) σύμβολο A "όδηγεί" σέ λέξεις πού άνήκουν στή γλώσσα $L((a \cup b)^*)$
- τό (μή τελικό) σύμβολο B "όδηγεί" σέ λέξεις πού άνήκουν στή γλώσσα $L((((ab) \cup b)^*((ab) \cup b)))$
- τό (άρχικό) σύμβολο S όδηγεί σέ λέξεις πού είναι συμπτήξεις:
  - μιάς λέξης πού παράγεται άπό τό σύμβολο A
  - μιάς λέξης ab
  - μιάς λέξης πού παράγεται άπό τό σύμβολο B

Κανονική έκφραση: $(((a \cup b)^*(ab))(((ab) \cup b)^*((ab) \cup b)))$

Μή ντετερμινιστικό πεπερασμένο αύτόματο:



Κανονική γραμματική:

$S \rightarrow aS \mid bS \mid aA$

$A \rightarrow bB$

$B \rightarrow bC \mid aD$

$C \rightarrow aD \mid bC \mid e$

$D \rightarrow bC$

ΑΣΚΗΣΗ 6

[α] $L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* : \#_b(w) = (\#_a(w))^2 \}$

Ὑποθέτουμε, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ L_1 εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Ἀπό τό θεώρημα ἄντλησης γιά γλῶσσες χωρίς συμφραζόμενα, ὑπάρχει κάποιος ἀκέραιος $K>0$ τέτοιος ὥστε κάθε λέξη $w \in L_1$ μέ μῆκος $|w| > K$ μπορεῖ νά γραφεῖ σάν $w = uvxyz$ ὅπου:

(i) $|vy| > 0$

(ii) $|vxy| \leq K$

(iii) $uv^m xy^m z \in L_1$ γιά κάθε ἀκέραιο $m \geq 0$.

Διαλέγουμε $w = a^K b^{K^2}$, ἔτσι ὥστε οἱ προϋποθέσεις ($|w| > K$) τοῦ θ. ἄντλησης νά ἰσχύουν.

Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

$\underbrace{aa\ldots a}_{vxy}bb\ldots b$

- Τά v καί y περιέχουν μόνο a.
  Ἀπό θ. ἄντλησης, ἡ λέξη $w' = uv^2xy^2z \in L_1$.
  Προσέξτε ὅτι: $\#_a(w') = \#_a(w) + |v| + |y| > K$, ἀφοῦ $|vy| > 0$, ἐνῶ $\#_b(w') = \#_b(w) = K^2$.
  Ἀντίφαση.

$aa\ldots a\underbrace{bb\ldots b}_{vxy}$

- Τά v καί y περιέχουν μόνο b.
  Ἀπό θ. ἄντλησης, ἡ λέξη $w' = uv^2xy^2z \in L_1$.
  Προσέξτε ὅτι: $\#_a(w') = \#_a(w) = K$, ἐνῶ $\#_b(w') = \#_b(w) + |v| + |y| > K^2$ ἀφοῦ $|vy| > 0$.
  Ἀντίφαση.

aa...abb...b
$\underbrace{\quad}_{vxy}$

• Τά v καί y περιέχουν a καί b. (Ἀκριβέστερα, ἡ λέξη $|vxy|$ περιέχει a καί b.) Ἀπό θ. ἄντλησης, ἡ λέξη $w' = uv^0xy^0z \in L_1$.

Θά ἔχουμε:

$$\#_a(w') = \#_a(w) - \#_a(vy) = K - \#_a(vy)$$
$$\#_b(w') = \#_b(w) - \#_b(vy) = K^2 - \#_b(vy)$$

ὅπου:

$$\#_a(vy) + \#_b(vy) = |vy| \leq K$$

Διακρίνουμε δύο ὑποπεριπτώσεις:

(i) $\#_a(vy) = 0$

Τότε, ἀφοῦ $|vy| > 0$, θά εἶναι $\#_b(vy) > 0$, ὁπότε $\#_b(w') < K^2$ ἐνῶ $\#_a(w') = \#_a(w) = K$.
Ἀντίφαση.

(ii) $\#_a(vy) > 0$

Τότε, ἀφοῦ $|vy| \leq K$, $\#_b(vy) \leq K-1$.
Ἀφοῦ $w' \in L_1$,

$$(K - \#_a(vy))^2 = K^2 - \#_b(vy)$$

Ἔχουμε:

$$(K - \#_a(vy))^2 \leq (K-1)^2$$

ἐνῶ:

$$K^2 - \#_b(vy) \geq K^2 - (K-1) = K^2 - K + 1$$

Ἀφοῦ $K > 0$, $(K-1)^2 < K^2 - K + 1$ (ἐπαληθεῦστε το!).
Ἕπεται ὅτι $(K - \#_a(vy))^2 < K^2 - \#_b(vy)$.
Ἀντίφαση.

[β] $L_2 = \{ a^i b^{2i} a^i \ : \ i \geq 0 \}$

Ὑποθέτουμε, γιά νά φθάσουμε σέ ἀντίφαση, ὅτι ἡ L_2 εἶναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Ἀπό τό θ. ἄντλησης γιά γλῶσσες χωρίς συμφραζόμενα, ὑπάρχει κάποιος ἀκέραιος $K > 0$ τέτοιος ὥστε κάθε λέξη $w \in L_2$ μέ μῆκος $|w| > K$ μπορεῖ νά γραφεῖ σάν $w = uvxyz$ ὅπου:

(i) $|vy| > 0$

(ii) $|vxy| \leq K$

(iii) $uv^m x y^m z \in L_2$ γιά κάθε ἀκέραιο $m \geq 0$.

Διαλέγουμε $w = a^K b^{2K} a^K$, ἔτσι ὥστε οἱ προϋποθέσεις $(|w| > K)$ τοῦ θ. ἄντλησης νά ἰσχύουν. Γράφουμε συμβολικά: $w = \underbrace{a^K}_{A} \underbrace{b^{2K}}_{B} \underbrace{a^K}_{C}$

Διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις, καί θεωροῦμε σέ κάθε μιά ἀπό αὐτές τίς περιπτώσεις τή λέξη $w' = uv^2xy^2z \in L_2$.

1. Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο a ἀπό τήν ὁμάδα A. Τότε, ὁ ἀριθμός τῶν a πρίν ἀπό τά b στή w' εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K (ἀφοῦ $|vy| > 0$), ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν b στήν w' διατηρεῖται σέ $2K$. Ἀντίφαση.

2. Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο b ἀπό τήν ὁμάδα B. Τότε, ὁ ἀριθμός τῶν a στίς ὁμάδες A καί C διατηρεῖται σέ K στήν w', ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν b στήν w' (μεταξύ τῶν ὁμάδων ἀπό a) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό $2K$ (ἀφοῦ $|vy| > 0$). Ἀντίφαση.

(3) Ἡ λέξη vxy περιέχει μόνο a ἀπό τήν ὁμάδα (C). Τότε, ὁ ἀριθμός τῶν a μετά ἀπό τά b στή λέξη w' εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K (ἀφοῦ |vy| > 0), ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν b στήν ὁμάδα (B) στή λέξη w' διατηρεῖται σέ 2K. Ἀντίφαση.

(4) Ἡ λέξη vxy περιέχει a ἀπό τήν ὁμάδα (A) καί b ἀπό τήν ὁμάδα (B). Τότε, στή w' ὁ ἀριθμός τῶν ~~A~~ a στήν ὁμάδα (A) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K, ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν a στήν ὁμάδα (C) διατηρεῖται σέ K. Ἀντίφαση.

(5) Ἡ λέξη vxy περιέχει b ἀπό τήν ὁμάδα (B) καί a ἀπό τήν ὁμάδα (C). Τότε, στή w' ὁ ἀριθμός τῶν a στήν ὁμάδα (C) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό K, ἐνῶ ὁ ἀριθμός τῶν a στήν ὁμάδα (A) διατηρεῖται σέ K. Ἀντίφαση.

Προσέξτε ὅτι οἱ περιπτώσεις (1) ἕως (5) ἐξαντλοῦν ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις: ἀφοῦ $|vxy| \leq K$, τό vxy δέν μπορεῖ νά καλύπτει καί τίς τρεῖς ὁμάδες διότι τότε θά εἶχε μῆκος $\geq 2K+2$.