2η Σειρά Ασκήσεων

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω γλώσσες, αποφασίστε αν είναι κανονική ή όχι. Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

   (a) $L_1 = \{a^{i-j} \mid \frac{i}{j} = 5\}$

   Η γλώσσα είναι κανονική. Σημειώστε ότι $\{(i-j) : (i/j) = 5\}$ είναι οι αριθμοί $\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 4. Οπότε η γλώσσα είναι η έκφραση $\{a^{4n} : n \geq 1\}$. Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα αυτή είναι κανονική από προηγούμενες ασκήσεις (φροντιστήριο).

   (b) $L_2 = \{a^{2n}b^{7n} \mid n \geq 0\}$.

   Η γλώσσα δεν είναι κανονική. Υποθέτουμε ότι η γλώσσα είναι κανονική και καταλήγουμε σε αντίφαση. Από το Θεώρημα άντλησης, υπάρχει ένα K τέτοιο ώστε για όλα τα $w \in L_2$ με $|w| > K$, μπορούμε να χωρίσουμε τη λέξη w σε κομμάτια x, y, z , $y \neq e$ ώστε $w = xyz$ και $xy^nz \in L_2$ για όλα τα $n \geq 0$. Αναλύουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις για τα x, y, z. Αφού $y \neq e$, υπάρχουν 3 πιθανές περιπτώσεις: 1. y περιέχει μόνο a , 2. y περιέχει μόνο b , 3. περιέχει a και b.

   1. y περιέχει μόνο a .
   Τότε $x = a^i$, $y = a^{2n-i}$, $y = b^{7n}$. Τότε για $n = 2$, $w' = xy^2z = a^ia^{2n-i}a^{2n-i}b^{7n} = a^{2n+i}b^{7n}$ πρέπει να ανήκει στη γλώσσα. Προφανώς η w' δεν ανήκει στη γλώσσα.

   2. y περιέχει μόνο b Τότε $x = a^2n$, $y = b^i$, $y = b^{7n-i}$. Τότε για $n = 2$, $w' = xy^2z = a^{2n}b^ib^ib^{7n-i} = a^{2n}b^{7n+i}$ πρέπει να ανήκει στη γλώσσα. Προφανώς η w' δεν ανήκει στη γλώσσα.

   3. περιέχει a και b. Τότε $x = a^i$, $y = a^{2n-i}b^{7n-j}$, $y = b^{7n-j}$. Τότε για $n = 2$, $w' = xy^2z = a^ia^{2n-i}b^{7n-j}a^{2n-i}b^{7n-j}b^{7n-j} = a^{2n}b^{7n-j}a^{2n-i}b^{7n-j}$ πρέπει να ανήκει στη γλώσσα. Προφανώς η w' δεν ανήκει στη γλώσσα.

   (c) $L_3 = \{a^nb^ma^mb^n \mid m, n \geq 0\}$.

   Η γλώσσα δεν είναι κανονική. Υποθέτουμε ότι η γλώσσα είναι κανονική και καταλήγουμε σε αντίφαση. Από το Θεώρημα άντλησης, υπάρχει ένα K τέτοιο ώστε για όλα τα $w \in L_2$ με $|w| > K$, μπορούμε να χωρίσουμε τη λέξη w σε κομμάτια x, y, z , $y \neq e$ ώστε $w = xyz$ και $xy^nz \in L_2$ για όλα τα $n \geq 0$. Αναλύουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις για τα x, y, z. Αφού $y \neq e$, υπάρχουν 3 πιθανές περιπτώσεις: 1. y περιέχει μόνο a , 2. y περιέχει μόνο b , 3. περιέχει a και b.

   1. y περιέχει μόνο a .
   Τότε για $n = 2$, η λέξη $w' = xy^2z$ περιέχει περισσότερα a από τη λέξη xyz ενώ το πλήθος των b παραμένει όπως και στην w. Αντίφαση αφού η w' θα έπρεπε να ανήκει στη γλώσσα.

   2. y περιέχει μόνο b Τότε για $n = 2$, η λέξη $w' = xy^2z$ περιέχει περισσότερα b από τη λέξη xyz ενώ το πλήθος των a παραμένει όπως και στην w. Αντίφαση αφού η w' θα έπρεπε να ανήκει στη γλώσσα.

   3. περιέχει a και b. Τότε $x = a^i$, $y = a^{2n-i}b^{7n-j}$, $y = b^{7n-j}$. Τότε για $n = 2$, $w' = xy^2z$ περιλαμβάνει περισσότερες εναλλαγές a, b (3 εναλλαγές) από ότι θα έπρεπε

(δηλ. 2 εναλλαγές) , από τον ορισμό της γλώσσας. Αντίφαση αφού η w' θα έπρεπε να ανήκει στη γλώσσα.

(d) $L_4 = \{a^i b^j \mid 4 \leq i + j \leq 7\}$.

Η γλώσσα είναι κανονική. Παρατηρείστε ότι κάθε λέξη που ανήκει στη γλώσσα έχει μήκος $|w| = i + j$. Άρα $4 \leq |w| \leq 7$ Υπολογίζουμε όλες τα δυνατά ζευγάρια (i, j) για όλα τα πιθανά μήκη λέξης (4,5,6,7):

i	j
0	4,5,6,7
1	3,4,5,6
2	2,3,4,5
3	1,2, 3,4,
4	0,1,2, 3
5	0,1,2,
6	0,1,
7	0

Άρα μπορύμε να υπλογίσουμε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα:
$(b^4 \cup b^5 \cup b^6 \cup b^7) \cup (a(b^3 \cup b^4 \cup b^5 \cup b^6)) \cup ... \cup (a^5(e \cup b \cup b^2)) \cup (a^6(e \cup b)) \cup (a^7)$.

2. Θεωρούμε αυθαίρετη γλώσσα L. Ορίζουμε τη γλώσσα της κυκλικής μετάθεσης ΚΜ της L ως εξής:

$$KM(L) = \{w \mid \exists x \in L, \, y, z : \, x = yz \text{ και } w = zy\}$$

Ορίζουμε επίσης τη γλώσσα της μετάθεσης $M(L)$ της L ως εξής:

$M(L) = \{w \mid \exists x \in L : |x| = |w|$ και το κάθε σύμβολο $\sigma \in \Sigma$ εμφανίζεται τον ίδιο αριθμό φορών στην x και την w $\}$.

(a) Αποδείξτε ότι αν η L είναι κανονική, τότε και η $KM(L)$ είναι κανονική.

Έστω $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ το ΝΠΑ που αναγνωρίζει τη L. Θα κατασκευάζουμε ένα ΜΝΠΑ $N = (Q', \Sigma, \delta', s, \{f\})$ που αναγνωρίζει τη $KM(L)$:
$Q' = \{s, f\}, \cup(Q \times Qtimes\{0, 1\})$

$$\delta'(q, \sigma) = \begin{cases} \{(p, p, 0) : p \in Q\} & \text{εάν } q = s \text{ και } \sigma = \epsilon \\ \{(\delta(p, \sigma), r, i)\} & \text{εάν } q = (p, r, i) \text{ και } \sigma \neq \epsilon \\ \{(q_0, r, 1)\} & \text{εάν } q = (p, r, 0) \text{ για κάποιο } p \in F, \, \sigma = \epsilon \\ \{f\} & \text{εάν } q = (p, p, 1) \text{ και } \sigma = \epsilon \\ \{emptyset\} & \text{αλλίως} \end{cases}$$

Μη τυπικά, το ΜΝΠΑ μας N αποτελείται από $2n$ αντίγραφα του αρχικού αυτόματου D, όπου n είναι το πλήθος των καταστάσεων στο αρχικό αυτόματο D. Δύο αντίγραφα, $Q \times \{q\} \times \{0\}$ και $Q \times \{q\} \times \{1\}$ αντιστοιχούν σε κάθε κατάσταση q και τα συμβολίζουμε ως το 0-αντίγραφο και το 1-αντίγραφο για την q. Θα υπάρχει μια καινούργια κατάσταση s που θα έχει ϵ-μεταβάσεις σε κάθε ένα από τα 0-αντίγραφα. Και όλες οι τελικές καταστάσεις σε κάθε 0-αντίγραφο έχουν ϵ-μεταβάσεις στην αρχική κατάσταση από το αντίστοιχο 1-αντίγραφο. Τέλος, για κάθε $q \in Q$, η κατάσταση q στο 1-αντίγραφο για την q έχει μια ϵ-μετάβαση στην νέα κατάσταση αποδοχής f.

Εάν $s \in KM(L)$ τότε $s = zy$ για κάποιες λέξεις z, y ώστε $yz \in L$. Υποθέστε ότι η L επεξεργάζοντας την y θα φτάσει στην κατάσταση q, τότε το N μπορεί μη-ντετερμινιστικά να μεταβεί στην κατάσταση q σε ένα 0-αντίγραφο για την q, να επεξεργαστεί όλα στο z, και να φτάσει στην κατάσταση αποδοχής του 0-αντίγραφου. Από τον ορισμό, μια άλλη ϵ-μετάβαση θα μας οδηγήσει στο αντίστοιχο 1-αντίγραφο, που θα επεξεργαστεί το y και θα φτάσουμε στην q (αφού η L επεξεργάζοντας το y θα φτάσει στην q). Πάλι από τον ορισμό, μια ϵ-μετάβαση θα μας οδηγήσει στην τελική κατάσταση του .

Τώρα εάν $s \in L(N)$, τότε η s μπορεί να γρφτεί ως yz όπου y μας πέρνει μέσω του 0-αντίγραφου και η z μας πέρνει μέσω του 1-αντίγραφου, Τότε από την κατασκευή, τρέχοντας το D πάνω στο z φτάνουμε σε μια κατάσταση p και το ΝΠΑ D επεξεργάζοντας το y και ξεκινώντας από την κατάσταση p θα φτάσει σε μια κατάσταση αποδοχής του D. Έτσι η $zy \in L$ και συνεπάγεται ότι $s = yz \in KM(L)$.

(b) Αποδείξτε ότι αν η L είναι κανονική, τότε και η $M(L)$ είναι κανονική.

Η $M(L)$ δεν είναι απαραίτητα κανονικά ακόμα και αν η L είναι κανονική. Θεωρήστε την $L = ((ab)^*)$. Τοτε $M(L) = \{w \in \{a,b\}^* :$ το πλήθος των a στην w ισούται με τον αριθμο των b στην $w\}$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι μη-κανονική.

3. Θεωρούμε τη γλώσσα $L = \{a^i b^j c^k \mid$ αν $i = 1$ τότε $j = k\}$.

(a) Αποδείξτε ότι η L ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Άντλησης.

Για οποιαδήποτε λέξη w $|w| \geq p$, ή η w είναι της μορφής c^*, bb^*c, ab^kc^k ή $a^2b^*c^*$. Στην πρώτη περίπτωση, έστω $w = xyz$, όπου $x = \epsilon$, $y = c$ και z είναι το υπόλοιπο της λέξης. Για όλα τα $i \geq 0$, $xy^iz = c^* \in L$. Στη 2η περίπτωση, έστω $w = xyz$, όπου $x = \epsilon$, $y = b$, z είναι το υπόλοιπο της λέξης. Για όλα τα $i \geq 0$, $xy^iz = b^*c^* \in L$. Στην 3η περίπτωση, έστω $w = xyz$, όπου $x = \epsilon$, $y = a$, z είναι το υπόλοιπο της λέξης. Για όλα τα $i \geq 0$, $xy^iz = a^*b^kc^k \in L$. Στην 4η περίπτωση, έστω $w = xyz$, όπου $x = \epsilon$, $y = a$, z είναι το υπόλοιπο της λέξης. Για όλα τα $i \geq 0$, $xy^iz = aa^*b^*c^* \in L$. Οπότε δείξαμε ότι η γλώσσα ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Άντλησης.

(b) Αποδείξτε η L δεν είναι κανονική.

Υποθέστε ότι η γλώσσα είναι κανονική. Οπότε η $L' = L \cap L(ab^*c^*)$ είναι κανονική. Τώρα θεωρήστε τον ισομορφισμό ϕ, με $a \to \epsilon$, $b \to b$, $c \to c$. $\phi(L') = \{b^kc^k \mid k \geq 0\}$h οποία είναι μη κανονική. Οπότε η αρχική μας υπόθεση είναι λάθος και η γλώσσα είναι μη-κανονική.

4. Υποθέτουμε ότι $L \subseteq \{a\}^*$. Αποδείξτε τότε ότι η L^* είναι κανονική.

Εάν $L = \emptyset$ ή $L = \{e\}$, τότε $L^* = \{e\}$, που είναι κανονική.

Αλλιώς, L έχει μια λέξη μεγέθους ≥ 1. Έστω $N = \{n : a^n \in L^*\}$, το οποίο θα περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό αριθμό. Έστω k ο ελάχιστος μη μηδενικός αριθμός αυτός στο N.

Η ιδέα εδώ είναι ότι όλα τα πολλαπλάσια του k θα πρέπει να είναι στο N, και εάν οτιδήποτε δίνει υπόλοιπο j όταν διαιρεται με το k είναι στο N, οτιδήποτε πιο μεγάλο δίνει υπόλοιπο j όταν διαιρεται με το k πάλι είναι στο N. Αυτό σημαίνει ότι θα μπορέσουμε να 'εξαντλήσουμε' την L με ένωση πεπερασμένου πλήθους κανονικών εκφράσεων. Πιο επίσημα, για κάθε $0 < j < k$, έστω m_j το μικρότερο $n \in N$ το οποίο δίνει ένα υπόλοιπο j όταν διαρείται με το k , και 0 εάν δεν υπάρχει τέτοιο n . Έστω $\alpha = (a^k)^* \cup a^{m_1}(a^k)^* \cup a^{m_2}(a^k)^* \cup \cdots \cup a^{m_{k-1}}(a^k)^*$.

Λήμμα: $L(\alpha) = (L^*)^*$.

Απόδειξη. Εάν $w \in L(\alpha)$ τότε $w \in (L^*)^*$: Δεδομένου ενός $w \in L(\alpha)$, γνωρίζουμε ότι $w \in L((a^k)^*)$ ή $w \in L(a^{m_j}(a^k)^*)$ για κάποιο j. Έτσι, ή $w = a^k a^k \cdots a^k$ ή $w = a^{m_j} a^k \cdots a^k$. Σε κάθε περίπτωση, w είναι ένας αριθμός από πράγματα στο L^* concatenated μαζί, έτσι είναι στο $(L^*)^*$.

Εάν $w \in (L^*)^*$ τότε $w \in L(\alpha)$: Δεδομένου ενός $w \in (L^*)^*$, η w ενήκει επίσης στο L^*, επειδή για οποιαδήποτε γλώσσα $L^* = (L^*)^*$. Έτσι, $w = a^n$ για κάποιο $n \in N$. Έστω j το υπόλοιπο όταν το n διαιρείται με το k. Εάν $j = 0$, τότε $w \in L((a^k)^*)$, και έτσι w είναι στο $L(\alpha)$. Αλλιώς, $n = m_j + ik$ για κάποιο $i \geq 0$, επειδή m_j είναι ο μικρότερος αριθμός $n \in N$ ο οποίος δίνει υπόλοιπο j όταν διαιρείται με το k. Έτσι, $w = a^n a^{m_j+ik} = a^{m_j}(a^k)^i \in L(a^{m_j}(a^k)^*)$, το οποίο σημαίνει ότι $w \in L(\alpha)$.

Έχοντας δείξει το παραπάνω, βλεπουμε ότι $L(\alpha) = (L^*)^*$, δηλ L^* αναπαραστάται από μια κανονική έκφραση α έτσι η γλώσσα είναι κανονική.

Παράδοση: 7 Μαρτίου.