ΕΠΛ211 Μ. Μαυρονικόλας

2η Σειρά Ασκήσεων
Πρόχειρες Λύσεις

1. (α) $\{a\}^*$

(β) $\{a\}^* \setminus \{\varepsilon\}$

2. (β)

Υποθέτουμε ότι η L_2 είναι κανονική, αφού είναι και άπειρη άρα ισχύει το θεώρημα Άντλησης ισχυρής μορφής. Υπάρχει μια σταθερά $M_{L_2} \geq 0$ έτσι ώστε για κάθε λέξη $w \in L$ με $|w| \geq M_{L_2}$, υπάρχουν λέξεις x, y, z όπου $w = xyz$ τέτοιες ώστε
(1) $y \neq e$ (2) $|xy| \leq M_{L_2}$ (3) xy^nz ανήκει στη L_2 για $n \geq 0$

Επιλέγουμε $\boxed{w = a^{m_L} b a^{m_L^2}}$ $w \in L_2$, Αφού $|xy| \neq 0$ έ $|xy| \leq M_{L_2} \Rightarrow$

Τότε πρέπει:
- $x = a^i$ $0 \leq i < m_L$
- $y = a^j$ $0 < j \leq M_L$
- $z = a^{m_L - i - j} b a^{m_L}$

Επιλέγουμε $\boxed{n=2} \Rightarrow w = xy^2z \in L_2$. Έχουμε ότι: $xy^2z = a^i a^{2j} a^{m_L-i-j} b a^{m_L^2} =$
$= a^{m_L+j} b a^{m_L^2}$ Για να ανήκει στη L_2 πρέπει
$(m_L+j)^2 = m_L^2 \Rightarrow$ πρέπει $\cancel{m_L}+j = \cancel{m_L} \Rightarrow j=0$ Άτοπο

(α)

Υποθέτουμε ότι η L_1 είναι κανονική. Αφού είναι και άπειρη, ισχύει το Θ. Άντλησης (ισχυρή μορφή). Έτσι υπάρχει $M_L > 0$ τ.ω. $\forall w$ με $|w| \geq m_L$ ...

(2) (α) $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* : \#_a(w) < \#_b(w) < 2\#_a(w) < \#_c(w)\}$

$\boxed{\text{Επιλέγουμε } w = a^{m_L+1} b^{m_L+2} c^{2m_L+3}}$ $w \in L_1$

$|w| \geq m_L$. Αφού $|xy| \leq m_L$ και $y \neq e$ τότε

xyz:

- $x = a^i$ $0 \leq i < m_L$
- $y = a^j$ $0 < j \leq m_L$
- $z = a^{m_L-i-j+1} b^{m_L+2} c^{2m_L+3}$

$\boxed{\text{Επιλέγουμε για } n=2.}$ Τότε:

$xy^2z = a^i a^{2j} a^{m_L-i-j+1} b^{m_L+2} c^{2m_L+3} =$

$= a^{m_L+j+1} b^{m_L+2} c^{2m_L+3}$

Για να ανήκει στη γλώσσα θα πρέπει

$m_L+j+1 < m_L+2 \overset{(=)}{\Rightarrow}$ άρα πρέπει $j=0 \Rightarrow$

Αντίφαση.

3. (β) $L_2 - L_2 = L(a^*b^*)$. Επομένως η L_2 είναι κανονική.

(α) Προσέξτε ότι $\{10^n : n \geq 0\} = \{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$

Έτσι, $L_1 = \{1^{10^n} : n \geq 0\}$. Η L_1 <u>δεν</u> είναι κανονική. (Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με εκείνη για το παράδειγμα 2.6.)

(Συνέχεια της άσκησης 3(α))

Θα δείξουμε ότι η γλώσσα L_1 δεν είναι κανονική. Ας υποθέσουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι αυτή είναι κανονική. Αφού η L_1 είναι προφανώς άπειρη γλώσσα, το Θεώρημα 6.5 μπορεί να εφαρμοστεί για την περίπτωσή της. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχουν λέξεις x, y και $z \in \{a, b\}^*$ τέτοιες ώστε $y \neq e$ και $xy^nz \in L_1$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Θεωρούμε τη λέξη $w = xyz$, η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση $n = 1$ και ανήκει επομένως στη γλώσσα L_1. Έτσι, πρέπει να είναι $|w| = 10^{m_0}$ για κάποιο ακέραιο $m_0 \geq 0$. Προσέξτε ότι για οποιοδήποτε ακέραιο $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |xy^nz| &= |xyz| + (n-1)|y| \\ &= 2^{m_0} + (n-1)|y|\,. \end{aligned}$$

Αφού $xy^nz \in L$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, έπεται (από τον ορισμό της γλώσσας L_2) ότι η παράσταση $10^{m_0} + (n-1)|y|$ είναι δύναμη του 10 για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Θεωρούμε ειδικότερα τις περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$.

- Έστω ότι η προκύπτουσα για $n = 2$ παράσταση $10^{m_0} + |y|$ είναι η p-ιοστή δύναμη του 2 για κάποιο ακέραιο $p \geq 0$. Δηλαδή, $10^{m_0} + |y| = 10^p$. Έπεται ότι $|y| < 10^p$.
- Αφού η παράσταση $10^{m_0} + (n-1)|y|$ αυξάνει μονοτονικά με το n, η προκύπτουσα για $n = 3$ παράσταση πρέπει να είναι η $(p+1)$-ιοστή δύναμη του 2 ή κάποια άλλη μεγαλύτερη δύναμη του 2. Έτσι, $10^{m_0} + 2|y| \geq 10^{p+1}$.

$9 \cdot 10^p > 10^p$.

Με κατά μέλη αφαίρεση προκύπτει ότι $|y| \geq 10^{p+1} - 10^p = 2^p$. Αντίφαση. □

Παρατήρηση: Η ασθενής μορφή του Θ. Άντλησης για κανονικές γλώσσες επαρκεί για τη συγκεκριμένη αυτή γλώσσα.

Θεώρημα 6.6 (Θεώρημα ¶ντλησης για Κανονικές Γλώσσες -- Ισχυρή Μορφή) *Έστω άπειρη και κανονική γλώσσα L. Τότε, υπάρχει σταθερά M_L (εξαρτώμενη απο τη γλώσσα L) τέτοια ώστε για κάθε λέξη $w \in L$ με μήκος $|w| \geq M_L$, η λέξη w μπορεί να γραφεί ως $w = xyz$, για κάποιες λέξεις x, y και z, έτσι ώστε:*

1. $y \neq e$.
2. $\cancel{|xy|}$ $|yz|$ $\leq M_L$.
3. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, η λέξη $xy^n z$ ανήκει επίσης στη γλώσσα L.*

Απόδειξη: Αφού η γλώσσα L είναι κανονική, το Θεώρημα του Kleene συνεπάγεται ότι αυτή είναι η γλώσσα κάποιου ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου M. **Λαμβάνουμε ως M_L τον αριθμό των καταστάσεων του αυτομάτου M.** Αφού η γλώσσα L είναι άπειρη, αυτή περιέχει κάποια λέξη $w = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l$ με μήκος $|w| = l \geq M_L$.

Ο υπολογισμός του (ντετερμινιστικού) αυτομάτου M πάνω στη λέξη w προσδιορίζει μια ακολουθία από $l+1$ καταστάσεις $q_0, q_1, \ldots, q_l$ ως εξής:

> Η κατάσταση q_0 είναι η αρχική κατάσταση του αυτομάτου M. Για κάθε ακέραιο i, $1 \leq i \leq l$, $q_i = \widehat{\delta}(q_0, \sigma_1 \ldots \sigma_i)$, όπου δ είναι η επεκτεταμένη συνάρτηση μετάβασης του ντετερμινιστικού πεπερασμένου αυτομάτου M.

Με άλλα λόγια, η κατάσταση q_i, $1 \leq i \leq l$, είναι η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το αυτόματο M μετά την ανάγνωση των πρώτων i συμβόλων της λέξης w. Προσέξτε ότι η κατάσταση q_l είναι τελική κατάσταση του αυτομάτου (αφού $w \in L$).

Λαμβάνουμε ως q_i και q_j το τελευταίο τέτοιο ζεύγος καταστάσεων. (Έτσι, δεν υπάρχει επαναλαμβανόμενη κατάσταση μετά την q_i.)

Η Αρχή του Περιστερώνα συνεπάγεται ότι δεν είναι δυνατό οι $M_L + 1$ καταστάσεις $q_0, q_1, \ldots, q_{M_L}$ να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, καθώς το αυτόματο M έχει μόνο M_L καταστάσεις. Έτσι, υπάρχουν δύο καταστάσεις q_i και q_j, όπου $0 \leq i < j \leq M_L$, οι οποίες ταυτίζονται -- δηλαδή, $q_i = q_j$. Μπορούμε τώρα να διασπάσουμε τη λέξη w ως $w = xyz$, ως εξής:

- $x = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_i$.
- $y = \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \ldots \sigma_j$.
- $z = \sigma_{j+1} \sigma_{j+2} \ldots \sigma_l$.

(δεν υπάρχουν επαναλαμβανόμενες καταστάσεις πέραν της q_i)

Διαισθητικά, η λέξη x οδηγεί το αυτόματο M (από την αρχική κατάσταση q_0) στην κατάσταση q_i, η λέξη y επαναφέρει το αυτόματο στην κατάσταση q_i (αφού $q_j = q_i$), και η λέξη z οδηγεί το αυτόματο (από την κατάσταση q_i) στην (τελική) κατάσταση q_l. Σημειώστε ότι η λέξη x μπορεί να είναι η κενή λέξη στην περίπτωση όπου $i = 0$, και η λέξη z μπορεί να είναι η κενή λέξη στην περίπτωση όπου $j = l$. Ωστόσο, η λέξη y είναι απαραίτητα διάφορη της κενής λέξης αφού $i < j$, όπως χρειάζεται να δείξουμε. **Επιπλέον, αφού ~~$j \leq M_L$, έπεται~~ $M_L - i$ ότι ~~$|xy|$~~ $|yz|$ $\leq M_L$** $- i \leq M_L$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τι συμβαίνει αν η είσοδος του αυτομάτου M είναι η λέξη $xy^n z$, όπου $n \geq 0$.

- Έστω καταρχήν ότι $n = 0$. Τότε, το αυτόματο M οδηγείται από την αρχική κατάσταση q_0 στην κατάσταση q_i πάνω στη λέξη x. Αφού $q_i = q_j$ και το αυτόματο οδηγείται από την κατάσταση q_j στην κατάσταση q_l πάνω στη λέξη z, έπεται ότι το αυτόματο οδηγείται από την κατάσταση q_i στην κατάσταση q_l πάνω στη λέξη z.
- Έστω τώρα ότι $n > 0$. Τότε, το αυτόματο M οδηγείται από την αρχική κατάσταση q_0 στην κατάσταση q_i πάνω στη λέξη y. Αφού $q_j = q_i$ και το αυτόματο οδηγείται από την κατάσταση q_i στην κατάσταση q_j πάνω στη λέξη y, έπεται ότι το αυτόματο οδηγείται από την κατάσταση q_i στην κατάσταση q_j πάνω στη λέξη y^n. (Στην πραγματικότητα, το αυτόματο M περνάει n φορές από την κατάσταση $q_j = q_i$, μία φορά για κάθε "αντίγραφο" της λέξης y.) Τέλος, το αυτόματο M οδηγείται από την κατάσταση q_j στην κατάσταση q_l πάνω στη λέξη z.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, η λέξη $xy^n z$ οδηγεί το αυτόματο M στην τελική κατάσταση q_l. Έπεται ότι $xy^n z \in L$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, όπως χρειάζεται. ■

(5) (i) $L_1 = \{a^i b^j : i < 2j\} = \{a^i b^j : 0 \leq i < j\} \cup \{a^i b^j : j \leq i < 2j\}$

$S_1 \rightarrow S_{11} / S_{12}$

$S_{11} \rightarrow A_1 B_1$
$A_1 \rightarrow a A_1 b / e$
$B_1 \rightarrow b B_1 / b$

$S_{12} \rightarrow aa S_{12} bb / A_2 / aabb$
$A_2 \rightarrow a A_2 / a A_2 b / e$

(ii) $L_2 = \{a^{2i} b^{3j} : i \neq j\} = \{a^{2i} b^{3j} : 0 \leq i < j\} \cup \{a^{2i} b^{3j} : 0 \leq j < i\}$

$S_2 \rightarrow S_{21} / S_{22}$

$S_{21} \rightarrow A_{21} B_{21}$
$A_{21} \rightarrow aa A_{21} bbb / e$
$B_{21} \rightarrow bbb B_{21} / bbb$

$S_{22} \rightarrow A_{22} B_{22}$
$A_{22} \rightarrow aa A_{22} / aa$
$B_{22} \rightarrow aa B_{22} bbb / e$

(iii) $L_3 = \{a^{3i} b^{2j} c^k : i = j + k\} = \{a^{3j} a^{3k} b^{2j} c^k : j, k \geq 0\} =$
$= \{a^{3k} a^{3j} b^{2j} c^k : j, k \geq 0\}$

$S_3 \rightarrow aaa S_3 c / B_3 / e$
$B_3 \rightarrow aaa B_3 bb / e$ ✓

(iv) $L_4 = \{a^{3i} b^{2j} c^k : j = i+k\} = \{a^{3i} b^{2(i+k)} c^k : i,k \geq 0\} =$

$= \{a^{3i} b^{2i} b^{2k} c^k : i,k \geq 0\} =$

$= \{a^{3i} b^{2i} : i \geq 0\} \circ \{b^{2k} c^k : k \geq 0\}$

$S_4 \to S_{41} \cdot S_{42}$

$S_{41} \to aaa\, A_{41}\, bb \,/\, e$ ✓

$S_{42} \to bb\, B_{41}\, c \,/\, e$