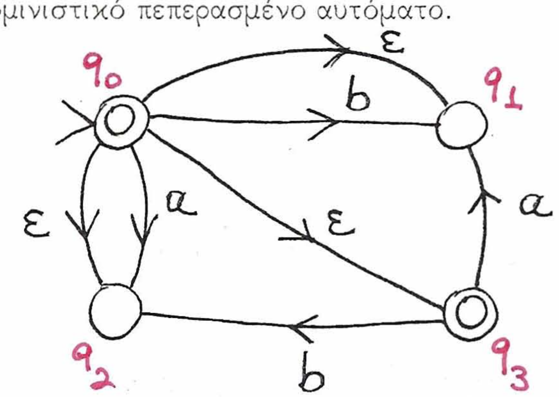
Αριστείδου Αριστείδης

Ενδιάμεση Εξέταση

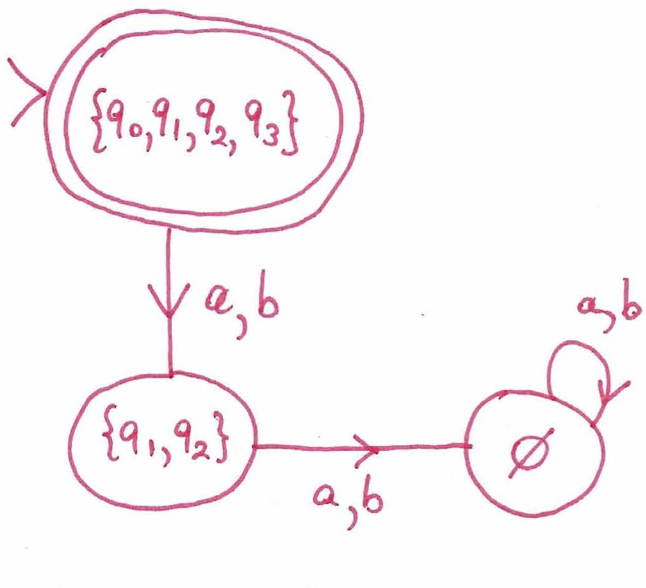
- Απαντείστε όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Μία ώρα και είκοσι λεπτά.

1. (8 μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία μη ντετερμινιστικών και ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων. Η Κατασκευή Υποσυνόλων παρέχει κατασκευαστική απόδειξη της ισοδυναμίας. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα την *Κατασκευή Υποσυνόλων* για να μετατρέψετε το μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο M_1 του σχήματος σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

Το αυτόματο M_1:



$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	a	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	b	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	a	$\varnothing$
$\{q_1, q_2\}$	b	$\varnothing$
$\varnothing$	a	$\varnothing$
$\varnothing$	b	$\varnothing$

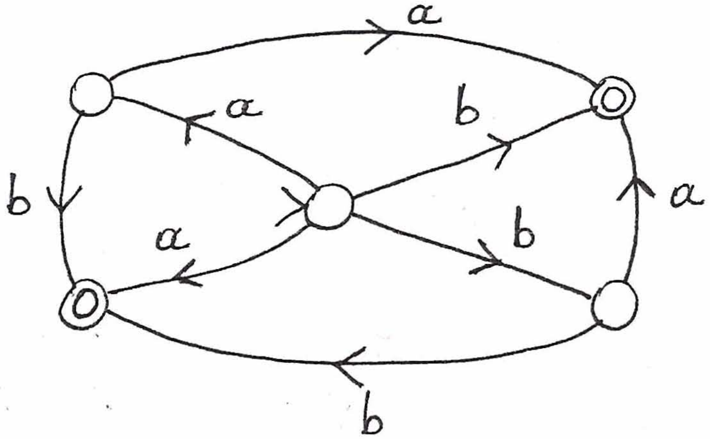


Υπάρχουν και άλλες ορθές κατασκευές (οι οποίες χρησιμοποιούν διαφορετική αρχική κατάσταση).

2. (10 + 8 = 18 μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία κανονικών εκφράσεων και πεπερασμένων αυτομάτων. Το Θεώρημα Kleene παρέχει κατασκευαστική απόδειξη της ισοδυναμίας. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο να βασίσετε τις κατασκευές που θα σας ζητηθούν στην κατασκευαστική εκείνη απόδειξη.

(α) Κατασκευάστε μία κανονική έκφραση <u>ισοδύναμη</u> προς το πεπερασμένο αυτόματο M_2 του σχήματος.

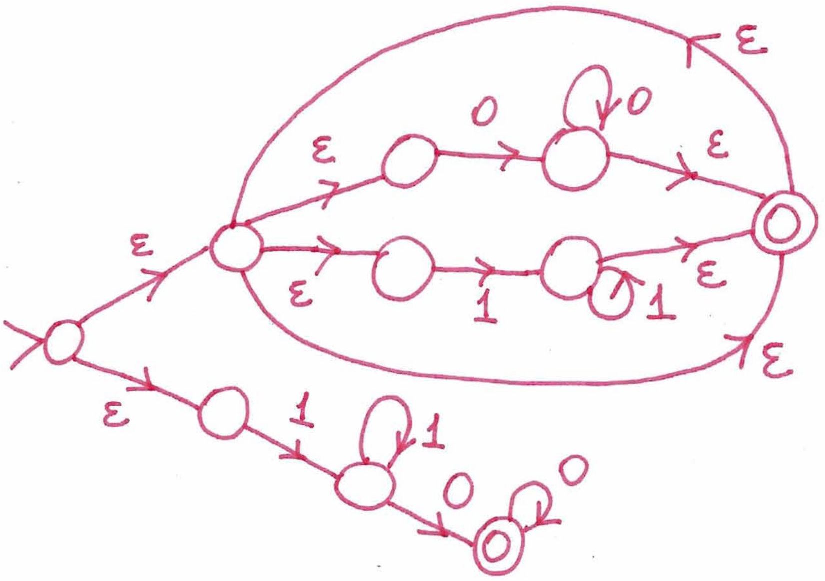
<u>Το αυτόματο M_2:</u>



$a \cup b \cup ba \cup ab \cup aa \cup bb$

(Η κανονική έκφραση κατασκευάστηκε με επισκόπηση.)

(β) Κατασκευάστε ένα πεπερασμένο αυτόματο ισοδύναμο προς την κανονική έκφραση $(00^* \cup 11^*)^* \cup (11^*00^*)$.



Θα δώσουμε μόνο τους κανόνες των κατηγορηματικών γραμματικών που ζητούνται.

3. **(5 + 5 + 5 + 8 = 23 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά εν μέρει τις ιδιότητες θήκης των κατηγορηματικών γλωσσών. Θεωρούμε την κατηγορηματική γραμματική G_1 με κανόνες

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid T$$
$$T \rightarrow aT \mid Ta \mid b$$

και την κατηγορηματική γραμματική G_2 με κανόνες

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid T$$
$$T \rightarrow bT \mid Tb \mid a\ .$$

(Νοείται ότι S είναι το αρχικό σύμβολο, ενώ S και T είναι οι (κοινές) μεταβλητές των γραμματικών G_1 και G_2.)

Κατασκευάστε κατηγορηματικές γραμματικές για τις ακόλουθες γλώσσες:

Σε όλα τα ερωτήματα, S είναι το νέο αρχικό σύμβολο.

(α) $\mathsf{L}(G_1) \cup \mathsf{L}(G_2)$

$$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid T_1 \mid T_2$$
$$T_1 \rightarrow aT_1 \mid T_1a \mid b$$
$$T_2 \rightarrow bT_2 \mid T_2b \mid a$$

(Συνηθες λάθος: Η γραμματική με κανόνες

$S \rightarrow aSb \mid bSa \mid T$
$T \rightarrow bT \mid Tb \mid a \mid aT \mid Ta \mid b$

η οποία επιτρέπει "ανάμιξη των κανόνων και παράγει λέξεις οι οποίες δεν ανήκουν σε καμιά από τις $L(G_1)$ και $L(G_2)$, όπως, π.χ., $aabbab$.)

(β) $\mathsf{L}(G_1) \cdot \mathsf{L}(G_2)$

$$S \rightarrow S_1 S_2$$
$$S_1 \rightarrow aS_1b \mid bS_1a \mid T_1$$
$$T_1 \rightarrow aT_1 \mid T_1a \mid b$$
$$S_2 \rightarrow aS_2b \mid bS_2a \mid T_2$$
$$T_2 \rightarrow bT_2 \mid T_2b \mid a$$

(γ) $(\mathrm{L}(G_1))^*$

$S \to aSb \mid bSa \mid T \mid \varepsilon \mid SS$

$T \to aT \mid Ta \mid b$

[Το συνηθέστερο λάθος στο ερώτημα [δ] ήταν ο ισχυρισμός ότι "αφού το σύνολο των κατηγορηματικών γλωσσών δεν είναι κλειστό κάτω από την πράξη της τομής, η γλώσσα $L(G_1) \cap L(G_2)$ δεν είναι κατηγορηματική". Αυτό που ισχύει είναι ότι η τομή δύο κατηγορηματικών γλωσσών μπορεί να είναι ή να μην είναι κατηγορηματική. (Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η γλώσσα $L(G_1) \cap L(G_2)$ τυγχάνει να είναι κατηγορηματική.)]

(δ) $\mathrm{L}(G_1) \cap \mathrm{L}(G_2)$

— Οι λέξεις που παράγει η G_1 έχουν την μορφή $u_1 w_1 \overline{u_1}$

— Οι λέξεις που παράγει η G_2 έχουν την μορφή $u_2 w_2 \overline{u_2}$

όπου $u_1, u_2 \in \{0,1\}^*$, η w_1 περιέχει 1 b και ≥ 1 a, η w_2 περιέχει 1 a και ≥ 1 b.
($\overline{u}$ σημαίνει ότι αλλάζουμε τα σύμβολα στην u^R – π.χ. $\overline{abb} = aab$)

Οι λέξεις που ανήκουν στην τομή είναι εκείνες για τις οποίες $u_1 = u_2$ και $w_1 = w_2$.

Πότε ισχύει $w_1 = w_2$; Μόνο όταν $w_1 = w_2 = ab$ ή $w_1 = w_2 = ba$, γιατί αυτές είναι οι μοναδικές λέξεις που ικανοποιούν $\#_a(w_1) = \#_a(w_2)$ και $\#_b(w_1) = \#_b(w_2)$! (Πρέπει να ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις απαιτήσεις πιο πάνω)

Έτσι, η τομή $L(G_1) \cap L(G_2)$ παράγεται από την γραμματική με κανόνες

$S \to aSb \mid bSa \mid ab \mid ba$

(η οποία μπορεί και να απλοποιηθεί ως $S \to aSb \mid bSa \mid \varepsilon$).

4. **(3 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 8 = 25** μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά τις μη κανονικές γλώσσες. Χρησιμοποιείστε το *Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή)* για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L \;=\; \{u\$v\$u' \mid u, v, u' \in \{a, b\}^* \text{ και } 2\#_a(v) \geq \#_b(u) + \#_b(u')\ \}$$

δεν είναι κανονική.

Σημειώστε ότι οι συμβολισμοί $\#_\sigma(u)$, $\#_\sigma(v)$ και $\#_\sigma(u')$ συμβολίζουν τον αριθμό των εμφανίσεων του συμβόλου $\sigma \in \{a, b\}$ στις λέξεις u, v και u', αντίστοιχα.

Η απόδειξή σας πρέπει να συμπληρώσει κατάλληλα τα (εννέα) κενα στην παρακάτω (ελλιπή) απόδειξη:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η L είναι κανονική. Αφού η L είναι άπειρη, το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά $M_L > 0$ τέτοια ώστε κάθε λέξη $w \in L$ με μήκος $|w| \geq M$ μπορεί να γραφεί ως $w = xyz$ έτσι ώστε *(i)* $y \neq \epsilon$, *(ii)* $|xy| \leq M_L$ και *(iii)* για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $xy^n z \in L$.

Επιλέγουμε τη λέξη $w =$ $b^{M_L} \$ a^{M_L} \$ b^{M_L}$ από τη γλώσσα L.

Προφανώς, $|w| =$ $3M_L + 2$ $\geq M$.

Από τις συνθήκες *(i)* και *(ii)*, έπεται ότι $x =$ b^i,

$y =$ b^j και

$z =$ $b^{M_L - i - j} \$ a^{M_L} \$ b^{M_L}$,

όπου $0 \leq i < M_L$ και $0 < j \leq M_L$.

Επιλέγουμε $n =$ 2.

Τότε, $xy^n z =$ $b^i b^{2j} b^{M_L - i - j} \$ a^{M_L} \$ b^{M_L} = b^{M_L + j} \$ a^{M_L} \$ b^{M_L}$.

Παρατηρούμε ότι $\#_b(u) + \#_b(u') = M_L + j + M_L = 2M_L + j$ και

$2\#_a(v) = 2M_L$. Αφού $j > 0$, $\#_b(u) + \#_b(u') > 2\#_a(v)$.

\- ____________________ -

\- ____________________ -

\- ____________________ Αντίφαση.

5. (17 + 9 = 26 μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά την κατασκευή κατηγορηματικής γραμματικής και την μετατροπή της σε αυτόματο με στοίβα. Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L_1 = \{u\$v \mid u, v \in \{a,b\}^* \text{ και } 2|u| \geq |v| + 2 \} .$$

(α) Παρουσιάστε μία κατηγορηματική γραμματική η οποία παράγει τη γλώσσα L_1. Η γραμματική σας <u>οφείλει</u> να είναι ορθή. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά της.

$$(*) \begin{cases} S \to aSaa \mid aSab \mid aSba \mid aSbb \mid \\ \quad\; bSaa \mid bSab \mid bSba \mid bSbb \\ S \to T \end{cases}$$

$$(**) \quad T \to aT \mid bT \mid a\$ \mid b\$$$

<u>Επεξηγήσεις για τη λύση:</u>

Η ομάδα (*) παράγει λέξεις της μορφής wTv όπου $|v| = 2|w|$.

Οι κανόνες στην ομάδα (**) μετατρέπουν την λέξη T ώστε η λέξη wTv να γίνει τελικά $ww'a\$v$ ή $\underbrace{ww'}_{u}b\$v$, όπου $w' \in \{a,b\}^*$.

Παρατηρούμε ότι $2|u| = 2(|w| + |w'| + 1) = 2|w| + 2|w'| + 2$
$$= |v| + 2|w'| + 2$$
$$\geq |v| + 2$$

όπως χρειάζεται.

Θα δώσουμε μόνο τις μεταβάσεις του αυτομάτου με στοίβα.

(β) Κατασκευάστε ένα αυτόματο με στοίβα ισοδύναμο προς την κατηγορηματική γραμματική που έχετε παρουσιάσει στο ερώτημα (α), το οποίο θα δέχεται την γλώσσα L_1.

Η κατασκευή σας οφείλει να χρησιμοποιεί την κατηγορηματική γραμματική που έχετε παρουσιάσει στο ερώτημα (α).

[Το αυτόματο με στοίβα λαμβάνεται με μετάφραση των κανόνων της γραμματικής στο ερώτημα [γ].]

$((p, e, e), (q, S))$

$((q, e, S), (q, aSaa))$
$((q, e, S), (q, aSab))$
$((q, e, S), (q, aSba))$
$((q, e, S), (q, aSbb))$
$((q, e, S), (q, bSaa))$
$((q, e, S), (q, bSab))$
$((q, e, S), (q, bSba))$
$((q, e, S), (q, bSbb))$
$((q, e, S), (q, T))$
$((q, e, T), (q, aT))$
$((q, e, T), (q, bT))$
$((q, e, T), (q, a\$))$
$((q, e, T), (q, b\$))$

$((q, a, a), (q, e))$
$((q, b, b), (q, e))$