

## Ενδιάμεση Εξέταση

- Απαντείστε όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Μία ώρα και είκοσι λεπτά.

1. (8 μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία μη ντετερμινιστικών και ντετερμινιστικών πεπερασμένων αυτομάτων. Η Κατασκευή Υποσυνόλων παρέχει κατασκευαστική απόδειξη της ισοδυναμίας. Χρησιμοποιείστε κατάλληλα την *Κατασκευή Υποσυνόλων* για να μετατρέψετε το μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο  $M_1$  του σχήματος σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.

Το αυτόματο  $M_1$ :

2. (10 + 8 = 18 μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά την ισοδυναμία κανονικών εκφράσεων και πεπερασμένων αυτομάτων. Το Θεώρημα Kleene παρέχει κατασκευαστική απόδειξη της ισοδυναμίας. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο να βασίσετε τις κατασκευές που θα σας ζητηθούν στην κατασκευαστική εκείνη απόδειξη.

(α) Κατασκευάστε μία κανονική έκφραση ισοδύναμη προς το πεπερασμένο αυτόματο  $M_2$  του σχήματος.

Το αυτόματο  $M_2$ :

(β) Κατασκευάστε ένα πεπερασμένο αυτόματο ισοδύναμο προς την κανονική έκφραση  $(00^* \cup 11^*)^* \cup (11^*00^*)$ .

3. ( $5 + 5 + 5 + 8 = 23$  μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά εν μέρει τις ιδιότητες θήκης των κατηγορηματικών γλωσσών. Θεωρούμε την κατηγορηματική γραμματική  $G_1$  με κανόνες

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid bSa \mid T \\ T &\rightarrow aT \mid Ta \mid b \end{aligned}$$

και την κατηγορηματική γραμματική  $G_2$  με κανόνες

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid bSa \mid T \\ T &\rightarrow bT \mid Tb \mid a . \end{aligned}$$

(Νοείται ότι  $S$  είναι το αρχικό σύμβολο, ενώ  $S$  και  $T$  είναι οι (κοινές) μεταβλητές των γραμματικών  $G_1$  και  $G_2$ .)

Κατασκευάστε κατηγορηματικές γραμματικές για τις ακόλουθες γλώσσες:

(α)  $L(G_1) \cup L(G_2)$

(β)  $L(G_1) \cdot L(G_2)$

$$(\gamma) \quad (L(G_1))^*$$

$$(\delta) \quad L(G_1) \cap L(G_2)$$

4. ( $3 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 8 = 25$  μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά τις μη κανονικές γλώσσες. Χρησιμοποιείτε το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L = \{u\$v\$u' \mid u, v, u' \in \{a, b\}^* \text{ και } 2\#_a(v) \geq \#_b(u) + \#_b(u')\}$$

δεν είναι κανονική.

Σημειώστε ότι οι συμβολισμοί  $\#_\sigma(u)$ ,  $\#_\sigma(v)$  και  $\#_\sigma(u')$  συμβολίζουν τον αριθμό των εμφανίσεων του συμβόλου  $\sigma \in \{a, b\}$  στις λέξεις  $u$ ,  $v$  και  $u'$ , αντίστοιχα.

Η απόδειξή σας πρέπει να συμπληρώσει κατάλληλα τα (εννέα) κενά στην παρακάτω (ελλιπή) απόδειξη:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η  $L$  είναι κανονική. Αφού η  $L$  είναι άπειρη, το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά  $M > 0$  τέτοια ώστε κάθε λέξη  $w \in L$  με μήκος  $|w| \geq M$  μπορεί να γραφεί ως  $w = xyz$  έτσι ώστε (i)  $y \neq \epsilon$ , (ii)  $|xy| \leq M$ , και (iii) για κάθε ακέραιο  $n \geq 0$ ,  $xy^n z \in L$ .

Επιλέγουμε τη λέξη  $w = \underline{\hspace{10cm}}$  από τη γλώσσα  $L$ .

Προφανώς,  $|w| = \underline{\hspace{10cm}} \geq M$ .

Από τις συνθήκες (i) και (ii), έπεται ότι  $x = \underline{\hspace{10cm}}$ ,

$y = \underline{\hspace{10cm}}$  και

$z = \underline{\hspace{10cm}}$ ,

όπου  $\underline{\hspace{10cm}}$ .

Επιλέγουμε  $n = \underline{\hspace{10cm}}$ .

Τότε,  $xy^n z = \underline{\hspace{10cm}}$ .

Παρατηρούμε ότι  $\underline{\hspace{10cm}}$

$\underline{\hspace{10cm}}$

$\underline{\hspace{10cm}}$

$\underline{\hspace{10cm}}$

$\underline{\hspace{10cm}}$  Αντίφαση.

5. (17 + 9 = 26 μονάδες) Το θέμα αυτό αφορά την κατασκευή κατηγορηματικής γραμματικής και την μετατροπή της σε αυτόματο με στοίβα. Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L_1 = \{u\$v \mid u, v \in \{a, b\}^* \text{ και } 2|u| \geq |v| + 2\}.$$

- (α) Παρουσιάστε μία κατηγορηματική γραμματική η οποία παράγει τη γλώσσα  $L_1$ .  
Η γραμματική σας οφείλει να είναι ορθή. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά της.

(β) Κατασκευάστε ένα αυτόματο με στίβια ισοδύναμο προς την κατηγορηματική γραμματική που έχετε παρουσιάσει στο ερώτημα (α), το οποίο θα δέχεται την γλώσσα  $L_1$ .

Η κατασκευή σας οφείλει να χρησιμοποιεί την κατηγορηματική γραμματική που έχετε παρουσιάσει στο ερώτημα (α).