Αριστείδου Αριστείδης

Τελική Εξέταση

- Απαντείστε όλα τα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: Δύο ώρες.

1. **(2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 6 + 2 + 1 + 6 = 25 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή). Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L_1 \;=\; \left\{a^i b^j c^k \;\mid j \leq \min\{i,k\}\right\}$$

δεν είναι κατηγορηματική.

Η απόδειξή σας **πρέπει** να συμπληρώσει κατάλληλα τα (δέκα) κενα στην παρακάτω (ελλιπή) απόδειξη:

Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η L_1 είναι κατηγορηματική. Αφού η L_1 είναι άπειρη, το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες (Ισχυρή Μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε κάθε λέξη $w \in L_1$ με μήκος $|w| \geq M$ μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ έτσι ώστε *(i)* $vy \neq \epsilon$, *(ii)* $|vxy| \leq M$, και *(iii)* για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $uv^nxy^nz \in L_7$.

Επιλέγουμε τη λέξη $w =$ $a^M b^M c^M$. Προφανώς, $w \in L_1$. Παρατηρούμε ότι $|w| =$ $3M$ $\geq M$.

Παρατηρούμε ότι καθεμιά από τις λέξεις v και y μπορεί να περιέχει μόνο ένα είδος συμβόλων διότι αλλοιώς η λέξη uv^2xy^2z περιέχει ανεπίτρεπτες εναλλαγές συμβόλων.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Η λέξη vy περιέχει το σύμβολο b. Τότε, επιλέγουμε $n =$ 2.
  Τότε, $uv^nxy^nz =$ $a^{M+|v|} b^{M+|y|} c^M$ ή $a^M b^{M+|v|+|y|} c^M$ ή $a^M b^{M+|v|} c^{M+|y|}$ (από την (ii)).
  Παρατηρούμε ότι στη λέξη που προκύπτει $j > M$ ενώ $\min\{i,k\} = M$. Άρα $j > \min\{i,k\}$. Από την συνθήκη (iii), $uv^2xy^2z \in L_1$. Άρα, $j \leq \min\{i,k\}$.
  Αντίφαση.
- Η λέξη vy δεν περιέχει το σύμβολο b. Τότε, επιλέγουμε $n =$ 0.
  Τότε, $uv^nxy^nz =$ $a^{M-|v|-|y|} b^M c^M$ ή $a^M b^M c^{|M|-|v|-|y|}$ (από την (ii)).
  Παρατηρούμε ότι στη λέξη που προκύπτει $j = M$ ενώ $\min\{i,k\} = M - |v| - |y| < M$ (αφού $|vy| > 0$). Άρα $j > \min\{i,k\}$. Από την συνθήκη (iii), $uv^0xy^0z \in L_1$. Άρα, $j \leq \min\{i,k\}$.
  Αντίφαση.

2. **(25 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά τα αυτόματα με δύο στοίβες. Θεωρούμε τη γλώσσα

$$L_2 \;=\; \{wc^m d^n w \mid\; w \in \{a,b\}^* \text{ και } m = \#_a(w) \text{ και } n = \#_b(w)\ \}\,.$$

Περιγράψτε με επαρκή ακρίβεια ένα αυτόματο με δύο στοίβες που να δέχεται τη γλώσσα L_2. Εξηγείστε συνοπτικά τη λειτουργία του αυτομάτου σας.

Το αυτόματο με δύο στοίβες σας οφείλει να είναι ορθό. Ωστόσο, δεν σας ζητείται να αποδείξετε την ορθότητά του.

[1] Διαβάζουμε πρώτα την πρώτη εμφάνιση της λέξης w και την αντιγράφουμε και στις δύο στοίβες.

[1/a] Μη ντετερμινιστικά αλλάζουμε κατάσταση.

[2] Διαβάζουμε τα c, και για κάθε c που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα a από το w στην πρώτη στοίβα ενώ αγνοούμε και σβήνουμε κάθε b από το w στην πρώτη στοίβα που συναντούμε.

/ στο βήμα [2], δεν κυτάζουμε καθόλου το w στην δεύτερη στοίβα /

[2/a] Μη ντετερμινιστικά αλλάζουμε κατάσταση.

[3] Διαβάζουμε τα d, και για κάθε d που διαβάζουμε, σβήνουμε ένα b από το w στην δεύτερη στοίβα, ενώ αγνοούμε και σβήνουμε κάθε a από το w στην δεύτερη στοίβα που συναντούμε.
Παράλληλα, καθώς διαβάζουμε το w στην δεύτερη στοίβα, αντιγράφουμε το w πίσω στην πρώτη στοίβα (ώστε να μην το "χάσουμε" καθώς διαγράφουμε τα b και τα a από το w στη δεύτερη στοίβα).

[3a] Μη ντετερμινιστικά αλλάζουμε κατάσταση.

[4] Διαβάζουμε τώρα την δεύτερη εμφάνιση της λέξης w και για κάθε σύμβολο που διαβάζουμε, σβήνουμε το ίδιο σύμβολο από την πρώτη στοίβα.

[4a] Μη ντετερμινιστικά, μπαίνουμε στην τελική κατάσταση.

3. **(25 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά τις ιδιότητες θήκης των αναδρομικά αριθμησίμων γλωσσών. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αναδρομικά αριθμησίμων γλωσσών είναι κλειστό κάτω από την πράξη της Θήκης Kleene.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε κατάλληλα την τεχνική των καταδύσεων.)

Έστω αναδρομικά αριθμήσιμη γλώσσα L, η οποία γίνεται δεκτή από την μηχανή Turing M. Θα δείξουμε ότι η L^* είναι αναδρομικά αριθμήσιμη. Αρκεί να κατασκευάσουμε μία μηχανή Turing M' η οποία τερματίζει και αποδέχεται κάθε λέξη $w \in L^*$ (και καμία άλλη λέξη). Η μηχανή Turing M' έχει το εξής πρόγραμμα:

"Πάνω σε αυθαίρετη λέξη εισόδου w, Χρησιμοποίησε την τεχνική των καταδύσεων για να προσομοιώσεις ταυτόχρονα όλους τους υπολογισμούς της μηχανής Turing M πάνω σε όλες τις (μη κενές) υπολέξεις της λέξης w.

Κάθε φορά που βρίσκεις ένα υπολογισμό ο οποίος τερματίζει και αποδέχεται κάποια υπολέξη w_i της w, κατέγραψε την υπολέξη w_i σε ένα κατάλληλο πίνακα.

Όταν έχεις καταγράψει υπολέξεις $w_1, \ldots, w_k$ τέτοιες ώστε $w_1 \cdot \ldots \cdot w_k = w$, τότε τερμάτισε και αποδέξου την λέξη w."

Προφανώς, αν $w \in L^*$, τότε $w = w_1 \cdot \ldots \cdot w_k$ για κατάλληλες υπολέξεις $w_1, \ldots, w_k$. Τότε, το πρόγραμμα της M' θα "ανακαλύψει" (εξ αιτίας των καταδύσεων) τις υπολέξεις $w_1, \ldots, w_k$ και θα δεχτεί τη λέξη w.

4. **(8 + 7 + 10 = 25 μονάδες)** Το θέμα αυτό αφορά την έννοια της πολλά-προς-ένα αναγωγής ($\leq_m$). Θεωρούμε τις γλώσσες

$$K_4 = \{\rho(M) \mid \mathsf{L}(M) = \Sigma^*\}$$

και

$$L_3 = \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle \mid \mathsf{L}(M_1) \leq_m \mathsf{L}(M_2)\}.$$

(Νοείται ότι $\rho(M)$ συμβολίζει την κωδικοποίηση μηχανής Turing M και $\mathsf{L}(M)$ συμβολίζει την γλώσσα η οποία γίνεται δεκτή από την μηχανή Turing M.)

(α) Παρουσιάστε κατάλληλη συνάρτηση αναγωγής f από την K_4 στην L_3.

$f: \{\rho(M)\} \to \{\langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle\}$ με $f(\rho(M)) = \langle \rho(M_1), \rho(M_2)\rangle$, όπου $\rho(M_1) = \rho(M)$ και $\rho(M_2) = \rho(M_0)$, όπου M_0 είναι η μηχανή Turing με το εξής πρόγραμμα:

"Πάνω σε αυθαίρετη είσοδο, w, τερμάτισε και αποδέξου."

Προφανώς, η f είναι αναδρομική συνάρτηση και $L(M_0) = \Sigma^*$.

(β) Θέλετε τώρα να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f που έχετε παρουσιάσει είναι πράγματι συνάρτηση αναγωγής από την K_4 στην L_3, Ποια είναι ακριβώς η συνθήκη που πρέπει να δείξετε;

$\forall w \in \Sigma^*, \quad w \in K_4 \Leftrightarrow f(w) \in L_3$

ή $\forall \rho(M), \quad \rho(M) \in K_4 \Leftrightarrow \langle \rho(M), \rho(M_0)\rangle \in L_3$

ή $\forall \rho(M), \quad L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow L(M) \leq_m L(M_0)$

ή $\forall \rho(M), \quad L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow L(M) \leq_m \Sigma^*$

ή $\forall \rho(M), \quad L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow (\exists$ αναδρομική συνάρτηση $f': \Sigma^* \to \Sigma^*: \forall w \ (w \in L(M) \Leftrightarrow f'(w) \in \Sigma^*))$

(γ) Αποδείξτε τώρα ότι η συνάρτηση f που έχετε παρουσιάσει είναι συνάρτηση αναγωγής από την K_4 στην L_3.

ή $\forall \rho(M), \quad L(M) = \Sigma^* \Leftrightarrow \left(\exists\right.$ αναδρομική συνάρτηση $f': \Sigma^* \to \Sigma^*: \forall w \ (w \in L(M) \Leftrightarrow$ αληθής$\left.)\right)$

— Έστω καταρχήν ότι $L(M) = \Sigma^*$. Τότε, για οποιαδήποτε (αναδρομική) συνάρτηση f', $(w \in L(M))$ είναι αληθής και η ισοδυναμία $\Leftrightarrow$ ισχύει $\forall w$.

— Έστω τώρα ότι $L(M) \neq \Sigma^*$. Τότε, για οποιαδήποτε (αναδρομική) f' $\exists\, w_0$ τέτοιο ώστε $(w_0 \in L(M))$ είναι ψευδής, και η ισοδυναμία $\Leftrightarrow$ δεν ισχύει για το w_0.