Λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων

1. **(20 μονάδες)** Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L_1 \;=\; \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

δεν είναι κανονική.

Λύση: Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η γλώσσα L είναι κανονική. Προφανώς, η γλώσσα L είναι άπειρη (αφού υπάρχουν άπειρα πολλές λέξεις $w \in \{0,1\}^*$). Έτσι, το Θεώρημα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες (ισχυρή μορφή) συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά $M_L > 0$ τέτοια ώστε για κάθε λέξη $w \in L$ με $|w| \geq M_L$, υπάρχουν λέξεις x, y και z με $w = xyz$ τέτοιες ώστε (1) $y \neq \epsilon$, (2) $|xy| \leq M_L$, και (3) για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, $xy^nz \in L$.

Επιλέγουμε τη λέξη $w = 0^{M_L}10^{M_L}1$. (Προφανώς, $|w| = 2M_L + 2 > M_L$.) Από τις συνθήκες (1) και (2), έπεται ότι $x = 0^i$, $y = 0^j$ και $z = 0^{M_L-i-j}10^{M_L}1$, όπου $0 \leq i < M_L$ και $0 < j \leq M_L$. Επιλέγουμε $n = 0$. Τότε, $xy^0z = 0^i0^{M_L-i-j}10^{M_L}1 = 0^{M_L-j}10^{M_L}1$. Αφού $j > 1$, η λέξη xy^0z δεν είναι της μορφής uu για κάποια λέξη $u \in \{0,1\}^*$. Επεται ότι $xy^0z \notin L$. Αντίφαση.

2. **(30 + 30 = 60 μονάδες)** Θεωρούμε τη γλώσσα PAREN των λέξεων με εξισορροπημένες παρενθέσεις δύο τύπων: (και), και [και]. Για παράδειγμα, ([()[]]([])) $\in$ PAREN αλλά [(]) $\notin$ PAREN.

   (α) Παρουσιάστε μια κατηγορηματική γραμματική για τη γλώσσα PAREN.

   Λύση: Θεωρούμε την κατηγορηματική γραμματική με κανόνες $S \rightarrow (S) \mid [S] \mid SS \mid \epsilon$.

   (β) Αποδείξτε προσεκτικά την ορθότητα της γραμματικής σας.

   Λύση: Θα δείξουμε δύο προτάσεις.

   Πρόταση 1. *Αν $S \Rightarrow^*_G w$, τότε $w \in$ PAREN.*

   Απόδειξη. Με επαγωγή στο μήκος $\ell \geq 1$ της παραγωγής $S \Rightarrow^*_G w$.

   Βάση: Έστω $\ell = 1$. Αφού $S \Rightarrow^1_G w$, έπεται ότι $w = \epsilon$ εξ αιτίας του κανόνα $S \rightarrow \epsilon$. Από τον ορισμό της PAREN, $\epsilon \in$ PAREN, και ο ισχυρισμός έπεται για $\ell = 1$.

   Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάποιο ακέραιο $n \geq 2$, για κάθε παραγωγή $S \Rightarrow^{n-1}_G w$, $w \in$ PAREN.

   Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε την παραγωγή $S \Rightarrow^n_G w$, όπου $n \geq 2$. Από την κατασκευή της γραμματικής G, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για τον πρώτο κανόνα της παραγωγής (οι δύο πρώτες από τις οποίες είναι εντελώς αντίστοιχες):

   - Ο πρώτος κανόνας είναι ο κανόνας $S \rightarrow (S)$: Τότε, $S \Rightarrow^1_G (S) \Rightarrow^{n-1}_G w$. Έτσι, $w = (y)$ για κάποια λέξη y τέτοια ώστε $S \Rightarrow^{n-1}_G y$. Από την επαγωγική υπόθεση, έπεται ότι $y \in$ PAREN. Τότε, $w = (y) \in$ PAREN από τον επαγωγικό ορισμό της γλώσσας PAREN.

- <u>Ο πρώτος κανόνας είναι ο κανόνας $S \to [S]$</u>: Τότε, $S \overset{1}{\Rightarrow}_G [S] \overset{n-1}{\Rightarrow}_G w$. Έτσι, $w = [y]$ για κάποια λέξη y τέτοια ώστε $S \overset{n-1}{\Rightarrow}_G y$. Από την επαγωγική υπόθεση, έπεται ότι $y \in \mathsf{PAREN}$. Τότε, $w = [y] \in \mathsf{PAREN}$ από τον επαγωγικό ορισμό της γλώσσας PAREN.
- <u>Ο πρώτος κανόνας είναι ο κανόνας $S \to SS$</u>: Τότε, Τότε, $S \overset{1}{\Rightarrow}_G SS \overset{n-1}{\Rightarrow}_G w$. Έτσι, $w = yz$ για κάποιεw λέξeiw y και z τέτοιες ώστε $S \overset{\ell_1}{\Rightarrow}_G y$ και $S \overset{\ell_2}{\Rightarrow}_G y$, όπου $1 \leq \ell_1, \ell_2 \leq n-1$. Από την επαγωγική υπόθεση, έπεται ότι $y \in \mathsf{PAREN}$ και $z \in \mathsf{PAREN}$. Τότε, $w = yz \in \mathsf{PAREN}$ από τον επαγωγικό ορισμό της γλώσσας PAREN.

Η επαγωγική απόδειξη είναι τώρα ολοκληρωμένη. □

Συνεχίζουμε ώστε να δείξουμε:

Πρόταση 2. *Αν $w \in \mathsf{PAREN}$, τότε $S \overset{*}{\Rightarrow}_G w$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή πάνω στην **τάξη** ℓ κατά την οποία η λέξη w είναι μέλος της γλώσσας PAREN σύμφωνα με τον επαγωγικό ορισμό της γλώσσας.

<u>*Βάση:*</u> Έστω ότι $\ell = 0$. Δηλαδή, η λέξη w είναι μέλος της γλώσσας PAREN κατά την τάξη 0. Από τον ορισμό της PAREN, $w = \epsilon$. Τότε, $S \overset{1}{\Rightarrow}_G \epsilon$ εξ αιτίας του κανόνα $S \to \epsilon$.

<u>*Επαγωγική υπόθεση:*</u> Έστω ότι για κάποιο ακέραιο $n \geq 2$, για κάθε λέξη w η οποία είναι μέλος της PAREN κατά την τάξη $\ell \leq n-1$, $S \overset{1}{\Rightarrow}_G w$.

<u>*Επαγωγικό βήμα:*</u> Θεωρούμε τη λέξη w η οποία είναι μέλος της PAREN κατά την τάξη n. Από τον ορισμό της PAREN, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις (οι δυο πρώτες από τις οποίες είναι αντίστοιχες):

- Υπάρχει λέξη y η οποία είναι μέλος της PAREN κατά την τάξη $\ell < n$ τέτοια ώστε $w = (y)$. Τότε, από επαγωγική υπόθεση, $S \overset{*}{\Rightarrow}_G y$. Επεται ότι

$$
\begin{array}{lll}
 & S & \\
\overset{1}{\Rightarrow}_G & (S) & (\text{εξ αιτίας του κανόνα } S \to (S) \\
\overset{1}{\Rightarrow}_G & (y) & (\text{αφού } S \overset{*}{\Rightarrow}_G y) \\
= & w\,, &
\end{array}
$$

  όπως χρειάζεται.

- Υπάρχει λέξη y η οποία είναι μέλος της PAREN κατά την τάξη $\ell < n$ τέτοια ώστε $w = [y]$. Τότε, από επαγωγική υπόθεση, $S \overset{*}{\Rightarrow}_G y$. Επεται ότι

$$
\begin{array}{lll}
 & S & \\
\overset{1}{\Rightarrow}_G & [S] & (\text{εξ αιτίας του κανόνα } S \to [S] \\
\overset{1}{\Rightarrow}_G & [y] & (\text{αφού } S \overset{*}{\Rightarrow}_G y) \\
= & w\,, &
\end{array}
$$

  όπως χρειάζεται.

- Υπάρχει λέξεις y και z οι οποίες είναι μέλη της PAREN κατά τις τάξεις ℓ_1 και ℓ_2, αντίστοιχα, όπου $1 \leq \ell_1, \ell_2 \leq n-1$, τέτοιες ώστε $w = yz$. Τότε, από επαγωγική υπόθεση, $S \overset{*}{\Rightarrow}_G y$ και $S \overset{*}{\Rightarrow}_G z$. Επεται ότι

$$
\begin{array}{lll}
 & S & \\
\overset{1}{\Rightarrow}_G & SS & (\text{εξ αιτίας του κανόνα } S \to SS
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow^1_G \quad [y] \quad (\text{αφού } S \Rightarrow^*_G y \text{ και } S \Rightarrow^*_G z) \\ &= \quad w\,, \end{aligned}$$

όπως χρειάζεται.

Η επαγωγική απόδειξη είναι τώρα ολοκληρωμένη. □

Ο ισχυρισμός έπεται από τις Προτάσεις 1 και 2.

3. **(20 μονάδες)** Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες για να δείξετε ότι η γλώσσα

$$L_2 \;=\; \{0^{pqr} \mid \text{ οι } p,\ q \text{ και } r \text{ είναι πρώτοι αριθμοί}\}$$

δεν είναι κατηγορηματική.

Λύση. Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε αντίφαση, ότι η (άπειρη) γλώσσα L_2 είναι κατηγορηματική. Έστω M η σταθερά του Θεωρήματος Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες για τη γλώσσα L_2. Για οποιουσδήποτε πρώτους αριθμούς p, q και r, όπου $p > M$, $q > M$ και $r > M$, επιλέγουμε την λέξη $w = a^{pqr} \in L_2$. Σαφώς, $|w| = pqr > M$. Έτσι, το Θεώρημα Άντλησης για Κατηγορηματικές Γλώσσες εξασφαλίζει ότι η λέξη w μπορεί να γραφεί ως $w = uvxyz$ ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες (1), (2) και (3) του Θεωρήματος.

Η συνθήκη (1) συνεπάγεται ότι $|vy| > 0$. Η συνθήκη (2) συνεπάγεται ότι $|vy| \leq M$. Η συνθήκη (3) συνεπάγεται (επιλέγοντας $n = pqr+1$) ότι η λέξη $uv^{pqr+1}xy^{pqr+1}z = a^{pqr+pqr|vy|} = a^{pqr(1+|vy|)} \in L_2$. Αφού $|vy| > 0$, η ποσότητα $pqr(1+|vy|)$ δεν είναι το γινόμενο τριών πρώτων αριθμών. Έπεται ότι $uv^{pqr+1}xy^{pqr+1}z \notin L_2$. Αντίφαση.